El valor de la ciencia

Por

Henri Poincaré

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE
Título original: *The Value of Science*

Primera edición: The Science Press, 1913

ISO-8859-1

INTRODUCCIÓN

La búsqueda de la verdad debe ser la meta de nuestras actividades: es el único fin digno de ellas. Sin duda debemos doblar nuestros esfuerzos para aliviar el sufrimiento humano, ¿pero por qué? No sufrir es un ideal negativo que seguramente se alcanza por la aniquilación del mundo. Si cada vez deseamos más liberar al hombre de las preocupaciones materiales, es para que pueda ser capaz de emplear la libertad obtenida en el estudio y contemplación de la verdad.

Pero a menudo la verdad nos asusta. Y, en realidad, sabemos que a veces es engañosa, que es un fantasma que nunca se muestra excepto para huir incesantemente, y que debe ser perseguido sin ser nunca alcanzado. Sin embargo, para trabajar hay que detenerse, como dijo algún griego, Aristóteles u otro, alguna vez. También sabemos lo cruel que puede ser la verdad a veces, y nos preguntamos si la ilusión no es más consoladora, incluso más vigorizante, porque la ilusión es lo que da confianza. Cuando haya desaparecido, ¿quedará la esperanza y tendremos el coraje para alcanzar algo? Así pues, ¿no es debido a que el caballo estaba enganchado a su caminadora que se negó a ir, incluso cuando sus ojos no estaban vendados? Y entonces, para buscar la verdad, es necesario ser independiente, totalmente independiente. Si, por el contario, deseamos actuar, ser fuertes, debemos estar unidos. Es por esto que muchos de nosotros tememos a la verdad; la consideramos una causa de debilidad. Pero la verdad no debe ser temida, porque por sí misma es bella.

Cuando aquí hablo de verdad, ciertamente me refiero primero a la verdad científica; pero también a la verdad moral, de la que lo que llamamos justicia es solamente un aspecto. Parecería que estoy haciendo un uso indebido de las palabras, que combino de esta forma, bajo el mismo nombre, dos cosas que no tienen nada en común; que la verdad científica, que es demostrada, de ninguna manera puede compararse con la verdad moral, que es sentida. Y aún así no puedo separarlas, y cualquiera que ama una no puede evitar amar la otra. Para encontrar una, así como para encontrar la otra, es necesario liberar completamente al alma del prejuicio y de la pasión; es necesario alcanzar una sinceridad absoluta. Estos dos tipos de verdad, cuando son descubiertos, dan la misma satisfacción; cada uno, cuando es percibido, emite el mismo esplendor, de tal manera que debemos verlo o cerrar nuestros ojos. Por último, ambos nos atraen y huyen de nosotros; nunca pueden fijarse: cuando pensamos haberlos alcanzado,

encontramos que aún tenemos que avanzar, y aquel que los persigue está condenado a no descansar nunca. Debe añadirse que aquellos que temen a uno también temen al otro; porque ellos son los que, para cualquier cosa, se preocupan sobre todo por las consecuencias. En una palabra, comparo las dos verdades porque las mismas razones nos hacen amarlas, y porque las mismas razones nos hacen temerlas.

Si no debemos temer a la verdad moral, menos a la verdad científica. En primer lugar, no puede estar en conflicto con la ética. La ética y la ciencia tienen sus propios campos, que se tocan pero no se compenetran. Una nos muestra a qué meta debemos aspirar, la otra, dada la meta, nos enseña cómo alcanzarla. Así que nunca puede haber conflicto porque nunca se pueden encontrar. No puede haber ciencia inmoral porque no puede haber moral científica.

Pero si la ciencia es temida, es sobre todo porque no puede darnos felicidad. Por supuesto que no puede. Incluso podemos preguntarnos si la bestia no sufre menos que el hombre. ¿Pero podemos lamentarnos de aquel paraíso terrenal en donde el hombre, como bruto, era realmente inmortal al desconocer que iba a morir? Cuando hemos probado la manzana, ningún sufrimiento puede hacer olvidarnos su sabor. Siempre volvemos a él. ¿Podría ser de otra forma? Preguntemos también si alguien que ha visto y es ciego no anhela la luz. El hombre, entonces, no puede ser feliz a través de la ciencia, pero hoy podría ser mucho menos feliz sin ella.

Pero si la verdad es el único objetivo que vale la pena perseguir, ¿podemos esperar alcanzarla? Puede muy bien dudarse de esto. Los lectores de mi pequeño libro *Ciencia e Hipótesis*[*] ya saben lo que pienso sobre esta cuestión. La ciencia que podemos vislumbrar no es del todo lo que la mayoría de los hombres llaman por tal nombre. ¿Esto significa que nuestra aspiración más legítima e imperativa es, al mismo tiempo, la más vana? ¿O podemos, a pesar de todo, abordar la verdad por algún lado? Esto es lo que debe investigarse.

En primer lugar, ¿qué instrumento tenemos a nuestra disposición para esta conquista? ¿No es la inteligencia humana, más específicamente la inteligencia del científico, susceptible de infinitas variaciones? Se podrían escribir volúmenes enteros sin agotar este tema; yo, en unas pocas páginas, únicamente lo he considerado a la ligera. Todo mundo está de acuerdo en que la mente del geómetra no es la misma que la del físico o la del naturalista; pero los mismos matemáticos no se parecen unos con

[*] Véase *Ciencia e Hipótesis*, traducción mía. Nota del Traductor.

otros. Algunos solamente reconocen la lógica implacable, otros apelan a la intuición y ven en ella la única fuente de descubrimiento. Y esto podría ser una razón para desconfiar. Para mentes tan distintas, ¿podrían los mismos teoremas matemáticos aparecer bajo la misma luz? La verdad que no es la misma para todos, ¿es verdad? Mirando las cosas más cerca, vemos cómo estos trabajadores muy distintos entre sí colaboran en una tarea común que no podría alcanzarse sin su mutua cooperación. Y eso ya nos tranquiliza.

Después deben examinarse los marcos en donde la naturaleza parece estar encerrada y que son llamados tiempo y espacio. En *Ciencia e Hipótesis* ya he demostrado qué tan relativo es su valor; no es la naturaleza la que nos los impone, somos nosotros los que los imponemos sobre la naturaleza porque los encontramos convenientes. Pero apenas he hablado más del espacio, y particularmente del espacio cuantitativo, por así decirlo, que consiste en las relaciones matemáticas cuyo agregado constituye la geometría. Debería haber demostrado que es lo mismo con el tiempo que con el espacio e incluso lo mismo con el "espacio cualitativo"; en particular, debería haber investigado por qué atribuimos tres dimensiones al espacio. Debe perdonárseme entonces que retome estas importantes cuestiones.

¿Es entonces el análisis matemático, cuyo principal objetivo es el estudio de estos marcos vacíos, únicamente un vano juego de la mente? Sólo puede dar al físico un lenguaje conveniente; ¿no es este un servicio mediocre que, estrictamente hablando, podría hacerse sin su ayuda? ¿No debe incluso temerse que este lenguaje artificial pueda ser un velo interpuesto entre la realidad y el ojo del físico? Lejos de esto; sin este lenguaje, la mayoría de las íntimas analogías de las cosas hubieran permanecido desconocidas por siempre; y hubiéramos ignorado la armonía interna del mundo que es, como veremos, la única realidad objetiva verdadera.

La mejor expresión de esta armonía es la ley. La ley es una de las conquistas más recientes de la mente humana; todavía hay personas que viven ante la presencia de un milagro perpetuo y no están asombrados por él. Por el contrario, nosotros somos los que debemos estar asombrados por la regularidad de la naturaleza. Los hombres demandan a sus dioses probar su existencia a partir de los milagros; pero la eterna maravilla es que no hay milagros sin cesar. El mundo es divino porque es una armonía. Si estuviese regido por el capricho, ¿qué nos probaría que no está regido por la casualidad?

Esta conquista de la ley la debemos a la astronomía, y justo esto engrandece a esta ciencia, más que la grandeza material de los objetos que considera. Fue del todo natural que la mecánica celeste haya sido el primer modelo de física matemática; pero desde entonces esta ciencia se ha desarrollado; y sigue desarrollándose de forma muy rápida. Y es ya necesario modificar, en ciertos puntos, el esquema que tracé en 1900 y del cual extraje dos capítulos de *Ciencia e Hipótesis*. En una alocución en la Exposición de San Luis en 1904, busqué estudiar el camino recorrido; el lector verá más adelante el resultado de esta investigación.

El progreso de la ciencia ha parecido poner en peligro los principios mejor establecidos, aquellos incluso que considerábamos como fundamentales. Aún así, nada demuestra que no vayan a ser salvados; y si esto se hace sólo imperfectamente, todavía subsistirán incluso siendo modificados. El avance científico no es comparable a los cambios de una ciudad, en donde los viejos edificios son derribados sin piedad para dar lugar a nuevas construcciones, sino a la continua evolución de los tipos zoológicos, que se desarrollan incesantemente y terminan por ser irreconocibles a la vista común, pero en donde un ojo experto encuentra siempre rastros del trabajo anterior de los siglos pasados. Uno no debe pensar, por tanto, que las viejas teorías hayan sido estériles y vanas.

Donde nos detengamos, encontraremos en estas páginas algunas razones para confiar en el valor de la ciencia, pero muchas más para desconfiar de tal cosa; quedará una impresión de duda. Ahora es necesario poner las cosas en orden.

Algunas personas han exagerado el papel de la convención en la ciencia; incluso han ido tan lejos como para decir que la ley, el hecho científico por sí mismo, fue creada por el científico. Esto es ir muy lejos hacia el nominalismo. No, las leyes científicas no son creaciones artificiales; no tenemos razón alguna para considerarlas accidentales, aunque sería imposible probar que no lo son.

¿Existe la armonía que la inteligencia humana piensa descubrir en la naturaleza fuera de esta inteligencia? No, más allá de toda duda. Una realidad completamente independiente de la mente que la concibe, ve o siente, es una imposibilidad. Un mundo tan exterior como ese, incluso si existiera, nos sería por siempre inaccesible. Pero lo que llamamos realidad objetiva es, en última instancia, lo que es común a muchos seres pensantes, y lo que pueda ser común a todos; esta parte común, como veremos, sólo puede ser la armonía expresada por las leyes matemáticas. Es pues esta armonía la única realidad objetiva, la única verdad que podemos alcanzar; y cuando añado que la armonía

universal del mundo es la fuente de toda belleza, se entenderá qué precio debemos atar al lento y difícil progreso que, poco a poco, nos permite conocer mejor esta armonía.

PARTE 1

LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS

CAPÍTULO 1

INTUICIÓN Y LÓGICA EN LAS MATEMÁTICAS

I

Es imposible estudiar los trabajos de los grandes matemáticos, o incluso aquellos de los no tan grandes, sin notar y distinguir dos tendencias opuestas o, mejor dicho, dos tipos de mentes completamente diferentes. El primer tipo está preocupado, sobre todo, por la lógica; al leer sus trabajos, uno está tentado a creer que han avanzado solamente paso por paso, a la manera de un Vauban[†] que embiste sus trincheras contra el lugar sitiado, dejando nada al azar. El otro tipo está guiado por la intuición y, en el primer golpe, logran conquistas rápidas aunque a veces precarias, como los audaces soldados de caballería de alguna guardia.

El método no está impuesto por la materia tratada. Aunque a menudo se dice que los primeros son *analistas* y los segundos *geómetras*, eso no impide que los primeros sean analistas aunque trabajen en la geometría, y que los otros sean geómetras aunque se ocupen del análisis puro. Es la misma naturaleza de su mente la que los hace lógicos o intuicionistas, y no pueden dejarlo a un lado al abordar un nuevo tema.

Ni es la educación la que ha desarrollado en ellos una de las dos tendencias y sofocado la otra. El matemático nace, no se hace, y parece ser que nace como geómetra o como analista. Me gustaría citar ejemplos y seguramente hay muchos; pero para acentuar el contraste, empezaré con un ejemplo extremo, tomándome la libertad de buscarlo en dos matemáticos vivos.

[†] El Marqués de Vauban (1633-1707) fue un estratega militar francés. Nota del Traductor.

El señor Méray quiere probar que una ecuación binomial siempre tiene una raíz o, en palabras ordinarias, que un ángulo siempre puede ser subdividido. Si existe alguna verdad que pensamos conocer a partir de la intuición directa, es ésta. ¿Quién podría dudar que un ángulo siempre puede dividirse en cualquier número de partes iguales? El señor Méray no lo ve de esta forma; para sus ojos, esta proposición no es en absoluto evidente y para probarla necesita varias páginas.

Por otro lado, veamos al profesor Klein: está estudiando una de las cuestiones más abstractas de la teoría de funciones para determinar si, sobre una superficie de Riemann dada, siempre existe una función que admita singularidades dadas. ¿Qué hace el célebre geómetra alemán? Reemplaza la superficie de Riemann por una superficie metálica cuya conductividad eléctrica varía de acuerdo con ciertas leyes. Conecta dos de sus puntos con los dos polos de una batería. La corriente, dice, debe pasar, y la distribución de esta corriente sobre la superficie definirá una función cuyas singularidades serán precisamente aquellas pedidas por la enunciación.

Sin duda, el profesor Klein sabe bien que aquí ha dado sólo un bosquejo: no obstante, no ha dudado en publicarlo; y probablemente crea que ha encontrado, si no una demostración rigurosa, por lo menos una especie de certeza moral. Un lógico hubiera rechazado con horror tal concepción, o quizá no hubiera tenido que rechazarla, porque en su mente nunca se hubiera originado.

De nuevo, permítanme comparar a dos hombres, el honor de la ciencia francesa, que recientemente nos han abandonado, pero que entraron desde hace tiempo en la inmortalidad. Hablo del señor Bertrand y del señor Hermite. Fueron estudiantes de la misma escuela al mismo tiempo; tuvieron la misma educación y estuvieron bajo las mismas influencias. Aún con todo esto, ¡qué gran diferencia hay entre ambos! No sólo esta diferencia resplandece en sus escritos, sino en sus enseñanzas, en su manera de hablar, en su misma mirada. En la memoria de todos sus pupilos están presentes estas dos caras. Para todos aquellos que tuvieron el placer de seguir sus enseñanzas, este recuerdo es todavía fresco: para nosotros es fácil evocarlo.

Mientras hablaba, el señor Bertrand siempre estaba moviéndose; a veces parecía estar en combate con algún enemigo externo, a veces esbozaba, con un gesto manual, las figuras que estudiaba. Apenas podía ver y era muy viejo para trazar figuras, y por eso acudía a la gesticulación. Con el señor Hermite, sucede justamente lo opuesto; sus ojos parecen huir del contacto con el mundo; no es fuera, sino dentro donde busca la visión de la verdad.

Dentro de los geómetras alemanes de este siglo, dos nombres son ilustres sobre todos los demás, aquellos de los dos científicos que han fundado la teoría general de funciones: Weierstrass y Riemann. Weierstrass lleva todo de vuelta a la consideración de las series y de sus transformaciones analíticas; para expresarlo mejor, reduce el análisis a una especie de prolongación de la aritmética: se pueden recorrer todos sus libros sin encontrar una sola figura. Riemann, por el contrario, recurre a la geometría inmediatamente: cada una de sus concepciones es una imagen que nunca puede olvidarse, una vez capturado su significado.

Más recientemente, Lie fue un intuicionista. De esto podría dudarse al leer sus libros, pero no después de hablar con él: inmediatamente se ve que piensa en imágenes. La señora Kovalevski, por el contrario, fue una lógica.

Entre nuestros estudiantes encontramos las mismas diferencias: algunos prefieren tratar sus problemas "por análisis", otros "por geometría". Los primeros son incapaces de "ver en el espacio", los segundos se cansan rápidamente de grandes cálculos y se vuelven perplejos.

Los dos tipos de mentes son igualmente necesarios para el progreso científico. Tanto los lógicos como los intuicionistas han logrado grandes cosas que otros no pudieron haber hecho. ¿Quién se aventuraría a decir que sería preferible que Weierstrass nunca hubiese escrito o que Riemann nunca hubiese existido? El análisis y la síntesis tienen sus legítimos papeles. Pero es interesante estudiar de manera más cercana, en la historia de la ciencia, la parte que pertenece a cada cual.

II

Es curioso, porque si leemos los trabajos de los antiguos, estamos tentados a clasificarlos a todos como intuicionistas. Pero la naturaleza es siempre la misma, y es muy poco probable que este siglo haya empezado a crear mentes consagradas a la lógica. Si pudiésemos ponernos en el flujo de ideas que reinaban en su tiempo, reconoceríamos que muchos de los antiguos geómetras eran, en tendencia, analistas. Euclides, por ejemplo, erigió una estructura científica donde sus contemporáneos no encontraron falla alguna. En esta vasta construcción, en donde cualquier pieza se debe a la intuición, podríamos reconocer, incluso hoy en día y sin mucho esfuerzo, el trabajo de un lógico.

No son las mentes las que han cambiado, sino las ideas: las mentes intuitivas han permanecido las mismas, pero sus lectores han requerido de ellas mayores concesiones.

¿Cuál es la causa de esta evolución? No es difícil de encontrar. La intuición no puede darnos rigor, ni siquiera certeza; esto se ha reconocido cada vez más. Citemos algunos ejemplos. Sabemos que existen funciones continuas carentes de derivadas. Nada es más chocante a la intuición que esta proposición impuesta sobre nosotros por la lógica. Nuestros padres no hubieran tenido reparo en decir: “Es evidente que cada función continua tiene una derivada, porque cada curva tiene una tangente”.

¿Cómo puede ser que la intuición nos engañe sobre este punto? Es porque, cuando intentamos imaginar una curva, no podemos representárnosla sin anchura; justo así, cuando nos representamos una línea recta, la vemos bajo la forma de una tira rectilínea de una cierta amplitud. Sabemos muy bien que estas líneas no tienen anchura; intentamos imaginarlas cada vez más estrechas para así aproximarnos al límite, de tal forma que hacemos una cierta medida, pero nunca alcanzaremos este límite. Y después es claro que siempre podemos representar estas dos tiras estrechas, una recta, otra curva, en una posición tal que se invadan ligeramente una sobre la otra sin cruzarse. De esta forma llegaríamos a concluir, a menos que nos prevenga un análisis riguroso, que una curva siempre tiene una tangente.

Como segundo ejemplo, tomaré el principio de Dirichlet sobre el cual descansan tantos teoremas de la física matemática. Hoy lo establecemos por razonamientos muy rigurosos pero muy largos; hasta antes, por el contrario, nos contentábamos con un resumen de la prueba. Una cierta integral, dependiente de una función arbitraria, nunca puede desaparecer. Por tanto se concluye que debe tener un mínimo. La falla de este razonamiento nos llama la atención inmediatamente, debido a que usamos el término abstracto *función* y estamos familiarizados con todas las singularidades que las funciones pueden presentar cuando la palabra es entendida en el sentido más general.

Pero no sería lo mismo si hubiéramos usado imágenes concretas. Si hubiéramos, por ejemplo, considerado esta función como un potencial eléctrico, habría sido legítimo afirmar que se puede alcanzar un equilibrio electrostático. Aún así, quizá una comparación física hubiera despertado alguna vaga desconfianza. Pero si se hubiese tenido cuidado al traducir el razonamiento en el lenguaje geométrico, intermedio entre el del análisis y el de la física, sin duda esta desconfianza no se hubiera producido, y quizá uno podría, incluso hoy, engañar a muchos lectores desprevenidos.

La intuición, por lo tanto, no nos da certeza. Esto es por lo que sucedió la evolución; veamos ahora cómo es que sucedió.

No pasó mucho antes de que se cayera en cuenta que el rigor no puede ser introducido en el razonamiento a menos que primero entrara en las definiciones. Por mucho tiempo, los objetos tratados por los matemáticos estuvieron mal definidos. Se suponían como conocidos porque eran representados por medio de los sentidos o de la imaginación, pero se tenía sólo una cruda imagen de ellos y no una idea precisa sobre la cual pudiera afianzarse el razonamiento. Fue ahí, antes que nada, a donde tuvieron que dirigir sus esfuerzos los lógicos.

Así fue con los números inconmensurables. La vaga idea de la continuidad, que debemos a la intuición, se resolvió en un complicado sistema de desigualdades referentes a números enteros.

Por tales medios, las dificultades derivadas de pasar al límite, o de la consideración de los infinitesimales, fueron finalmente removidas. Hoy en día, en el análisis, sólo quedan números enteros o sistemas de números enteros (finitos o infinitos) unidos por una red de relaciones de igualdad o desigualdad. Las matemáticas, como se diría, están aritmetizadas.

III

Una primera cuestión se presenta por sí misma. ¿Se ha terminado esta evolución? ¿Hemos finalmente alcanzado un rigor absoluto? A cada paso de la evolución, nuestros padres también pensaban haberlo alcanzado. Si ellos se engañaron, ¿no estaremos haciendo nosotros lo mismo?

Creemos que en nuestros razonamientos ya no apelamos a la intuición; los filósofos dirán que esto es una ilusión. La lógica pura no nos conduciría a nada excepto a tautologías; no puede crear nada nuevo, ni a partir de ella lo puede hacer la ciencia. En un sentido, estos filósofos tienen razón: para hacer aritmética, así como para hacer geometría, o cualquier ciencia, es necesario algo más que la lógica pura. Para designar este algo más no tenemos otra palabra que la de *intuición*. ¿Pero cuántas ideas distintas se esconden bajo esta misma palabra?

Comparemos estos cuatro axiomas: (1) Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí; (2) si un teorema es cierto para el número 1, y si probamos que es cierto para $n+1$ si es cierto para n, entonces será cierto para todos los números enteros; (3) si

sobre una línea recta el punto *C* se encuentra entre *A* y *B* y el punto *D* entre *A* y *C*, entonces el punto *D* estará entre *A* y *B*; (4) a través de un punto dado, no hay más que una paralela a una línea recta dada.[‡]

Todos estos cuatro axiomas se atribuyen a la intuición, aun cuando el primero es la enunciación de una de las reglas de la lógica formal; el segundo es un juicio sintético *a priori* real, el fundamento de la inducción matemática rigurosa; el tercero sea una apelación a la imaginación; y el cuarto sea una definición disfrazada.

La intuición no necesariamente se basa sobre la evidencia de los sentidos; los sentidos, de ser esto así, pronto perderían su poder. Por ejemplo, no nos podemos representar un chiliágono, aun cuando razonemos, por intuición, sobre los polígonos en general, que incluyen al chiliágono como un caso particular.

Ustedes saben lo que Poncelet entendía por el *principio de continuidad*. Lo que es cierto para una cantidad real, decía Poncelet, debe ser cierto para una cantidad imaginaria; lo que es cierto para la hipérbola cuyas asíntotas son reales, debe entonces ser cierto para la elipse cuyas asíntotas son imaginarias. La de Poncelet fue una de las mentes más intuitivas de este siglo; una intuición pasional, casi ostentosa. Consideraba al principio de continuidad como una de sus concepciones más audaces, aun cuando este principio no descansara sobre la evidencia de los sentidos. Asimilar la hipérbola a la elipse era más bien contradecir esta evidencia. Únicamente era una especie de generalización precoz e instintiva que, por otra parte, no tengo intención de defender.

Tenemos, pues, muchos tipos de intuición; primero, la apelación a los sentidos y a la imaginación; después, la generalización por inducción, copiada, por decirlo de alguna manera, de los procedimientos de la ciencias experimentales; finalmente, tenemos la intuición del número puro, donde surgió el segundo de los axiomas ya enunciados, y que es capaz de crear el verdadero razonamiento matemático. He mostrado arriba, con ejemplos, que los primeros dos no pueden darnos certeza alguna; ¿pero quién podría seriamente dudar del tercero? ¿Quién dudaría de la aritmética?

Ahora bien, en el análisis de hoy en día, cuando uno se toma la molestia de ser riguroso, no puede haber nada más que silogismos o apelaciones a esta intuición del número puro, la única intuición que no puede engañarnos. Podría decirse que hoy en día se ha alcanzado el rigor absoluto.

[‡] Este axioma (que es el quinto postulado de Euclides), también se puede escribir así: Por un punto dado externo a una línea recta, solamente puede pasar una línea recta por tal punto, paralela a la primera línea recta. Nota del Traductor.

IV

Los filósofos hacen una objeción más: “Lo que ganas en rigor”, afirman, “lo pierdes en objetividad. Solamente puedes erigir tu idea lógica al cortar los lazos que te atan a la realidad. Tu ciencia es infalible, pero sólo puede mantenerse así al encarcelarse en una torre de marfil y renunciar a toda relación con el mundo externo. Debe salir de esta reclusión ante el menor intento de aplicación.”

Por ejemplo, intento demostrar que alguna propiedad pertenece a algún objeto cuyo concepto me es, al principio, indefinible, porque es intuitivo. Primero fallaré o me deberé contentar con pruebas aproximadas; finalmente, me decido a dar a mi objeto una definición precisa, y esto me permite establecer esta propiedad de una manera irreprochable.

“Y entonces”, dirán los filósofos, “todavía queda demostrar que el objeto que corresponde a esta definición es en realidad el mismo que conociste por la intuición; o bien que algún objeto real y concreto, cuya conformidad con tu idea intuitiva crees reconocer inmediatamente, corresponde a tu nueva definición. Solamente así podrás afirmar que tiene la propiedad en cuestión. Únicamente has desplazado la dificultad”.

Eso no es exactamente así. La dificultad no ha sido desplazada, ha sido dividida. La proposición a ser establecida estaba en realidad compuesta de dos verdades distintas, al principio no distinguibles. La primera era una verdad matemática, y ahora está rigurosamente establecida. La segunda era una veracidad experimental. La experiencia, por sí misma, puede enseñarnos que algún objeto real y concreto corresponde o no corresponde a alguna definición abstracta. Esta segunda veracidad no está matemáticamente demostrada, pero tampoco puede estarlo, no más que las leyes empíricas de las ciencias físicas y naturales. Sería irracional pedir más.

Pues bien, ¿no constituye un gran avance haber distinguido lo que por mucho tiempo era confuso? ¿Esto significa que no queda nada de la objeción del filósofo? No es lo que pretendo decir. Al volverse rigurosa, la ciencia matemática toma un carácter tan artificial como para impresionar a cualquiera; se olvida de sus orígenes históricos; vemos cómo pueden responderse las preguntas, pero ya no cómo y por qué se plantean.

Esto nos muestra que la lógica no es suficiente; que la ciencia de la demostración no es toda la ciencia y que la intuición debe mantener su papel como complemento, estaba a punto de decir, como contrapeso o como antídoto de la lógica.

Ya he tenido ocasión de insistir sobre el lugar que la intuición debe tener en la enseñanza de las ciencias matemáticas. Sin ella, las mentes jóvenes no podrían empezar a comprenderlas; no podrían aprender a amarlas, y verían en ellas solamente una vana logomaquia. Por encima de todo, sin la intuición nunca podrían ser capaces de aplicar las matemáticas. Pero ahora quisiera, antes que nada, hablar del papel de la intuición en la ciencia por sí misma. Si es útil para el estudiante, lo es aún más para el científico creativo.

V

Buscamos la realidad, pero ¿qué es la realidad? Los fisiólogos nos dicen que los organismos están formados por células; los químicos añaden que las mismas células están formadas por átomos. ¿Significa esto que estos átomos o estas células constituyen la realidad, o más bien, la única realidad? La manera en la que están organizadas estas células y de las cuales resulta la unidad del individuo, ¿no es también una realidad mucho más interesante que la de los elementos aislados? ¿Debería un naturalista - que nunca ha estudiado al elefante excepto por medio del microscopio - pensar que está lo suficientemente familiarizado con tal animal?

Pues bien, en las matemáticas sucede algo análogo a todo esto. El lógico corta, por así decirlo, cada demostración en un gran número de operaciones elementales. Cuando hemos examinado estas operaciones una después de la otra y hemos comprobado que cada una es correcta, ¿debemos pensar que hemos comprendido el significado real de la demostración? ¿Lo habremos comprendido incluso cuando, a partir de la memoria, podamos ser capaces de repetir esta prueba al reproducir todas estas operaciones elementales justo en el orden en el que las acomodó su inventor? Evidentemente no. Todavía no estaríamos en posesión de toda la realidad: aquella parte que unifica la demostración nos eludiría.

El análisis puro pone a nuestra disposición una multitud de procedimientos que garantizan su infalibilidad. Nos ofrece mil maneras distintas por las cuales nos podemos embarcar con toda confianza, y estamos seguros de no encontrar en ellas obstáculo alguno. Pero de todos estos caminos, ¿cuál nos conducirá con puntualidad a nuestra meta? ¿Quién nos dice cuál elegir? Necesitamos una facultad que nos haga ver el final desde la lejanía, y la intuición es esta facultad. Es necesario para el explorador elegir su

ruta; no lo es menos para aquel que sigue su ruta, saber por qué escogió tal o cual camino.

Si nos encontramos en un juego de ajedrez, no será suficiente, para el entendimiento del juego, conocer las reglas de los movimientos de las piezas. Eso únicamente nos permitirá reconocer que cada movimiento ha sido hecho conforme con estas reglas, y este conocimiento realmente tendrá muy poco valor. Y esto es lo que haría el lector de un libro de matemáticas si sólo fuese un lógico. Pero comprender el juego es totalmente distinto. Significa saber por qué el jugador mueve esta pieza en lugar de la otra que pudo haber movido sin romper las reglas del juego. Es percibir la razón interna que hace de esta serie de movimientos sucesivos una especie de todo organizado. Esta facultad es aún más necesaria para el jugador, es decir, para el inventor.

Dejemos de lado esta comparación y volvamos a las matemáticas. Por ejemplo, veamos qué ha sucedido con la idea de función continua. Al principio, ésta era únicamente una imagen sensible, por ejemplo, la de una marca continua trazada por un gis sobre un pizarrón. Después se volvió, poco a poco, más refinada; hace no mucho se utilizó para construir un complicado sistema de desigualdades que reproducían, por decirlo de alguna manera, todas las líneas de la imagen original. Terminada esta construcción, fue removido el centrado del arco, por así decirlo, aquella cruda representación que temporalmente sirvió como soporte y que después fue rechazada por considerarla inútil. Solamente quedó la construcción por sí misma, irreprochable ante los ojos del lógico. Y si la primitiva imagen desapareció por completo de nuestro recuerdo, ¿cómo podríamos adivinar a partir de qué capricho fueron erigidas de esta forma todas estas desigualdades una después de la otra?

Probablemente se piense que uso muchas comparaciones; me disculpo por otra más. Sin duda ustedes han observado aquellos delicados montajes de agujas silíceas que forman el esqueleto de ciertas esponjas. Cuando ha desaparecido la materia orgánica, únicamente queda un frágil y delicado encaje. Es cierto, no hay nada más ahí excepto sílice, pero lo interesante es la forma que adopta este sílice, y no podríamos comprenderlo si no conociésemos la esponja viva que precisamente le ha dado tal forma. Así es como las viejas nociones intuitivas de nuestros padres, incluso cuando las hemos abandonado, todavía imprimen su forma sobre las construcciones lógicas que hemos puesto en su lugar.

Esta visión del agregado es necesaria para el inventor; es igualmente necesaria para cualquiera que realmente desee comprender al inventor. ¿Nos la puede otorgar la lógica? No. El nombre que los matemáticos le dan será suficiente para probarlo. En las matemáticas, la lógica es llamada *análisis,* y análisis significa *división, disección*. No puede tener, por tanto, más herramienta que el bisturí y el microscopio.

De esta forma, la lógica y la intuición tienen, cada una, un papel necesario que cumplir. Cada una es indispensable. La lógica, que por sí misma nos da certeza, es el instrumento de la demostración; la intuición es el instrumento de la invención.

VI

Pero al momento de formular esta conclusión, soy presa de los escrúpulos. Al principio, distinguimos dos tipos de mentes matemáticas, un tipo lógico y analista, el otro intuitivo y geómetra. Pues bien, los analistas también han sido inventores. Los nombres que he citado hacen que mi insistencia en este tema sea innecesaria.

Aquí hay una contradicción, por lo menos aparente, que necesita una explicación. Y antes que nada, ¿es plausible pensar que estos lógicos siempre han procedido de lo general a lo particular, como las reglas de la lógica formal lo hubiesen requerido? Así no hubieran podido extender los límites de la ciencia; la conquista científica solamente es posible a partir de la generalización.

En uno de los capítulos de *Ciencia e Hipótesis*[§], tuve ocasión de estudiar la naturaleza del razonamiento matemático, y he mostrado cómo este razonamiento - sin dejar de ser absolutamente riguroso - nos puede llevar de lo particular a lo general por un procedimiento que he llamado *inducción matemática*. Es a partir de este procedimiento que los analistas han hecho progresar a la ciencia, y si examinamos el detalle mismo de sus demostraciones, encontraremos tal progreso en cada instante, fuera del clásico silogismo de Aristóteles. Vemos, por lo tanto, que los analistas no son simplemente hacedores de silogismos a la manera escolástica.

Además, ¿puede pensarse que siempre han marchado, paso a paso, sin visión alguna de la meta que desean alcanzar? Deben haber adivinado el camino que los llevó hasta allí, y para eso necesitaban una guía. Esta guía es, primero, la analogía. Por ejemplo, uno de los métodos de demostración estimado por los analistas es el que se

[§] Véase, en ese libro, el capítulo I, *Sobre la naturaleza del razonamiento matemático*, traducción mía. Nota del Traductor.

encuentra en el empleo de funciones dominantes. Sabemos que tal función ha servido para resolver una multitud de problemas. ¿En qué consiste entonces el papel del inventor, que pretende aplicar tal función a un problema nuevo? Al principio, debe reconocer la analogía de esta cuestión con aquellas que ya han sido resueltas por este método. Después debe percibir en qué forma difiere esta nueva cuestión de las otras, y, por consiguiente, deducir las modificaciones necesarias para aplicarlas al método.

¿Pero cómo es que uno percibe estas analogías y estas diferencias? En el ejemplo recientemente citado, casi siempre resultan evidentes, pero pude haber encontrado otros en donde estuvieran mucho más escondidas, y en donde, a menudo, es necesaria una penetración muy inusual para su descubrimiento. Los analistas, para que no se les escapen estas analogías escondidas (es decir, para que sean inventores), deben tener un sentido directo - sin la ayuda de los sentidos y de la imaginación - de qué constituye la unidad de una pieza de razonamiento, de qué está constituida, por así decirlo, su alma y vida más íntima.

Cuando uno habla con el señor Hermite, se nota que nunca evoca una imagen sensitiva, y aún así pronto se percibe que las entidades más abstractas eran para él como seres vivos. No los veía, pero percibía que no eran un montaje artificial, y que poseían algún principio de unidad interna.

Pero, podría decirse, eso es intuición. ¿Debemos concluir que la distinción hecha con anterioridad era sólo aparente, que sólo hay un tipo de mente y que todos los matemáticos son intuicionistas, por lo menos aquellos capaces de inventar?

No. Nuestra distinción corresponde a algo real. He dicho antes que hay muchos tipos de intuición. He dicho qué tanto difiere la intuición del número puro - de donde viene la inducción matemática rigurosa - de la intuición sensible en donde la imaginación, propiamente dicha, es el principal contribuyente.

¿Es el abismo que las separa menos profundo de lo que parecía al principio? ¿Podríamos reconocer, con un poco de atención, que esta intuición pura no podría ser sin la ayuda de los sentidos? Esto es un asunto propio de los psicólogos y de los metafísicos y no discutiré la cuestión. Pero lo que es cierto es suficiente para justificarme al reconocer y afirmar una diferencia esencial entre los dos tipos de intuición. No tienen el mismo objeto y parecen demandar dos facultades distintas de nuestra alma; uno pensaría en dos reflectores dirigidos a dos mundos extraños uno a otro.

Es la intuición del número puro, aquella de las puras formas lógicas, la que ilumina y dirige a aquellos que hemos llamado *analistas*. Esto es lo que les permite no solamente demostrar, sino también inventar. Por ella, son capaces de percibir, de un vistazo, el plano general de un edificio lógico, y al parecer sin que intervengan los sentidos. Al rechazar la ayuda de la imaginación que, como hemos visto, no es siempre infalible, pueden avanzar sin miedo alguno a engañarse ellos mismos. ¡Felices son, por tanto, aquellos que pueden hacerlo sin su ayuda! Debemos admirarlos, aunque sean muy raros.

Dentro de los analistas habrá pues inventores, pero serán muy pocos. La mayoría de nosotros, si quisiésemos ver lejos a partir de la pura intuición, nos encontraríamos pronto invadidos por el vértigo. Nuestra debilidad tiene necesidad de un bastón más sólido y, a pesar de las excepciones que he mencionado, es no obstante cierto que la intuición sensible es, en las matemáticas, el instrumento inventivo más común.

A propósito de estas reflexiones, surge una cuestión de la que no he tenido tiempo de resolver e incluso de enunciar con el desarrollo que requeriría. ¿Hay lugar para una nueva distinción, en donde se distinga entre los analistas que, sobre todo, usen esta intuición pura y aquellos que, antes que nada, estén preocupados por la lógica formal?

El señor Hermite, por ejemplo, no puede ser clasificado dentro de los geómetras que hacen uso de la intuición sensible; pero tampoco es un lógico propiamente dicho. No oculta su aversión a los procedimientos puramente deductivos que comienzan con lo general y terminan con lo particular.

CAPÍTULO II

LA MEDIDA DEL TIEMPO

I

Siempre que no salgamos del ámbito de la consciencia, la noción del tiempo es relativamente clara. No solamente distinguimos sin dificultad una sensación presente del recuerdo de sensaciones pasadas o la anticipación de sensaciones futuras, sino que sabemos perfectamente bien lo que queremos decir cuando decimos que, de dos fenómenos conscientes que recordamos, uno fue anterior al otro; o que, de dos fenómenos conscientes previstos, uno será anterior al otro.

Cuando decimos que dos hechos conscientes son simultáneos, queremos significar que están profundamente compenetrados, de tal suerte que el análisis no puede separarlos sin mutilarlos.

El orden en el que ordenamos los fenómenos conscientes no admite arbitrariedad alguna. Está impuesto sobre nosotros y no podemos cambiar nada de él.

Solamente tengo una observación más que añadir. Para que un agregado de sensaciones se vuelva un recuerdo capaz de ser clasificado en el tiempo, debe cesar de ser actual, debemos haber perdido el sentido de su infinita complejidad, porque de otra forma permanecería presente. Por decirlo de alguna manera, debe haberse cristalizado alrededor de un centro de asociaciones de ideas que sería una suerte de etiqueta. Es sólo así, cuando han perdido toda vida, que podemos clasificar nuestras memorias en el tiempo, así como un botánico acomoda las flores secas en su herbario.

Pero estas etiquetas únicamente pueden ser finitas en número. A ese respecto, el tiempo psicológico debería ser discontinuo. ¿De dónde viene la sensación de que entre cualesquiera dos instantes hay otros? Acomodamos nuestros recuerdos en el tiempo, pero sabemos que quedan compartimentos vacíos. ¿Cómo podría ser eso, si el tiempo no fuese una forma preexistente en nuestra mente? ¿Cómo sabríamos que hay compartimentos vacíos, si estos compartimentos sólo nos fuesen revelados por su contenido?

II

Pero eso no es todo. Dentro de esta forma queremos poner no solamente los fenómenos de nuestra propia consciencia, sino también aquellos en donde su aula son otras consciencias. Aún más, queremos poner ahí hechos físicos, aquellos con los que las personas forman concepciones espaciales y que ninguna consciencia ve directamente. Esto es necesario porque sin ello no podría haber ciencia. En una palabra, el tiempo psicológico nos es dado y ha de crear el tiempo científico y físico. Ahí comienza la dificultad, o mejor dicho las dificultades, porque son dos.

Pensemos en dos consciencias, que son como dos mundos impenetrables uno con otro. ¿A partir de qué nos esforzamos en ponerlos en el mismo molde, en medirlos por el mismo estándar? ¿No es como si uno se esforzara en medir la longitud con gramos o el peso con un metro? Y además, ¿por qué hablamos de medición? Quizá sabemos que algún hecho es anterior a otro, pero no *por cuánto* es anterior.

Por tanto surgen dos dificultades: (1) ¿Podemos transformar el tiempo psicológico, que es cualitativo, en un tiempo cuantitativo? (2) ¿Podemos reducir a una y a la misma medida hechos que tienen lugar en distintos mundos?

III

La primera dificultad ha sido notada desde hace tiempo y ha sido el tema de largas discusiones. Podría decirse que la cuestión está resuelta: *No tenemos una intuición directa de la igualdad de dos intervalos de tiempo*. Las personas que creen poseer esta intuición son víctimas de una ilusión. Cuando decimos que del mediodía a la una pasa el mismo tiempo que de dos a tres, ¿qué significado tiene esta afirmación?

La menor reflexión muestra que, por sí misma, no tiene significado alguno. Solamente tendrá la que escojamos darle, a partir de una definición que ciertamente tendrá una cierto grado de arbitrariedad. Los psicólogos pueden estar satisfechos con este significado; no así los físicos y los astrónomos. Vemos cómo han manejado esta cuestión.

Para medir el tiempo, utilizan un péndulo y suponen, por definición, que todas las oscilaciones de este péndulo son de igual duración. Pero esto es tan sólo una primera aproximación; la temperatura, la resistencia del aire, la presión barométrica, hacen que el ritmo del péndulo varíe. Si pudiésemos escapar de estas fuentes de error,

obtendríamos una aproximación mucho más cercana, aunque no dejaría de ser una aproximación. Nuevas causas (eléctricas, magnéticas u otras) hasta ahora ignoradas introducirían diminutas perturbaciones.

De hecho, incluso los mejores cronómetros deben ser corregidos de vez en cuando, y las correcciones son hechas a partir de observaciones astronómicas. Se hacen arreglos para que el reloj sideral marque la misma hora cuando la misma estrella pase el meridiano. En otras palabras, es el día sideral, esto es, la duración de la rotación de la Tierra, la unidad constante de tiempo. Se supone, a partir de una nueva definición que sustituye a aquella basada en las oscilaciones del péndulo, que dos rotaciones completas de la Tierra sobre su eje tienen la misma duración.

No obstante, los astrónomos aún no están contentos con esta definición. Muchos de ellos piensan que las mareas actúan como un freno sobre nuestro globo, y que la rotación de la Tierra se está volviendo cada vez más lenta. Así se explicaría la aparente aceleración del movimiento de la luna, que parecería ir más rápido de lo que la teoría permite porque nuestro reloj, la Tierra, está yendo lento.

IV

Todo esto carece de importancia, dirán algunos. Sin duda nuestros instrumentos de medición son imperfectos, pero es suficiente con que podamos concebir un instrumento perfecto. Este ideal no puede alcanzarse, pero es suficiente con haberlo concebido y así haber dado rigor a la definición de la unidad del tiempo.

El problema es que no hay tal rigor en la definición. Cuando usamos el péndulo para medir el tiempo, ¿qué postulado admitimos implícitamente? *Que la duración de dos fenómenos idénticos es la misma* o, si se prefiere, que las mismas causas tardan el mismo tiempo en producir los mismos efectos.

A primera vista, esta es una buena definición de la igualdad de dos duraciones. Pero tengamos cuidado. ¿Es imposible que algún día el experimento pueda contradecir nuestro postulado?

Permítanme explicarme. Supongamos que en un cierto lugar del mundo sucede el fenómeno α, causando como consecuencia, al final de un cierto tiempo, el efecto α’. En otro lugar del mundo muy distante del primero, sucede el fenómeno β, que causa como consecuencia el efecto β’. Los fenómenos α y β son simultáneos, así como también los efectos α’ y β’.

Después, el fenómeno α es reproducido bajo aproximadamente las mismas condiciones que antes, y *simultáneamente* el fenómeno β es también reproducido en un lugar muy distante en el mundo y casi bajo las mismas circunstancias. Los efectos α' y β' también tienen lugar. Supongamos que el efecto α' sucede perceptiblemente antes que el efecto β'.

Si la experiencia nos hiciese testigos de tal espectáculo, nuestro postulado sería contradicho, porque la experiencia nos diría que la primera duración αα' es igual a la primera duración ββ', y que la segunda duración αα' es menor que la segunda duración ββ'. La igualdad y la desigualdad deducidas de la experiencia serían incompatibles con las dos igualdades deducidas del postulado.

¿Podemos afirmar que las hipótesis que he hecho son absurdas? No son, de ninguna manera, contrarias al principio de contradicción. Sin duda no podrían suceder sin que el principio de razón suficiente fuese violado, pero para justificar una definición tan fundamental prefiero alguna otra garantía.

V

Pero eso no es todo. En la realidad física, una causa no produce un efecto dado, sino que una multitud de distintas causas contribuyen a producirlo, sin que tengamos medio alguno para discriminar la parte de cada una de ellas.

Los físicos intentan hacer tal distinción, pero únicamente lo hacen de forma aproximada y, sin importar qué tanto progresen, nunca harán tal distinción sino aproximadamente. Es aproximadamente cierto que el movimiento del péndulo se debe únicamente a la atracción de la Tierra; pero, en rigor, cada atracción, incluso la de la estrella Sirio, actúa sobre el péndulo.

Bajo estas condiciones, es claro que las causas que han producido un cierto efecto nunca serán reproducidas excepto aproximadamente. Entonces debemos modificar nuestro postulado y nuestra definición. En lugar de decir: "Las mismas causas tardan el mismo tiempo en producir los mismos efectos", debemos decir: "Causas casi idénticas tardan casi el mismo tiempo en producir casi los mismos efectos".

Nuestra definición, por consiguiente, no es nada sino aproximada. Además, tal como el señor Calinon ha justamente observado en una reciente memoria[**]:

[**] *Etude sur les diverses grandeurs*. París, Gauthier-Villars, 1897.

Una de las circunstancias de cualquier fenómeno es la velocidad de la rotación de la Tierra; si esta velocidad de rotación varía, constituye, en la reproducción de este fenómeno, una circunstancia que ya no es la misma. Pero suponer esta velocidad de rotación como constante es suponer que sabemos cómo medir el tiempo.

Nuestra definición no es, por tanto, todavía satisfactoria; no es ciertamente aquella que los astrónomos sobre los que hablé implícitamente adoptan cuando afirman que la rotación terrestre está desacelerando.

¿Qué significado, de acuerdo con ellos, tiene esta afirmación? Únicamente podemos comprenderla al analizar las pruebas dadas de su proposición. Dicen, primero, que la fricción de las mareas produciendo calor debe destruir la *vis viva*. Invocan, por tanto, al principio de *vis viva*, o de la conservación de la energía.

Después dicen que la aceleración secular de la luna, calculada de acuerdo con la ley de Newton, será menor que la deducida de las observaciones a menos que se haga la corrección relativa a la desaceleración de la rotación terrestre. Invocan, por tanto, a la ley de Newton. En otras palabras, definen la duración de la siguiente manera: el tiempo debe ser definido de tal forma que la ley de Newton y la ley de *vis viva* puedan ser verificadas. La ley de Newton es una verdad experimental; por tanto, es sólo aproximada, lo que muestra que aún tenemos únicamente una definición por aproximación.

Si ahora se supone que es adoptada otra forma de medir el tiempo, los experimentos sobre los cuales está fundada la ley de Newton tendrían, no obstante, el mismo significado. Únicamente sucedería que la enunciación de la ley sería distinta, porque sería traducida a otro lenguaje; evidentemente sería mucho más simple. De tal suerte que la definición implícitamente adoptada por los astrónomos puede resumirse así: el tiempo debe definirse de tal forma que las ecuaciones de la mecánica sean tan simples como sea posible. En otras palabras, no hay una forma de medir el tiempo más verdadera que otra; lo que generalmente es adoptado es únicamente más *conveniente*. De dos relojes, no tenemos derecho alguno para decir que uno avanza de manera verdadera y el otro no; solamente podemos decir que resulta más ventajoso conformarnos con las indicaciones del primero.

La dificultad que nos ha ocupado hasta ahora ha sido, como ya señalé, muchas veces señalada. Entre los trabajos más recientes en donde está considerada, debo

señalar, además del pequeño libro del señor Calinon, el tratado sobre mecánica del señor Andrade.

VI

La segunda dificultad ha atraído, hasta el momento, mucha menos atención, aún cuando es, en conjunto, análoga a la precedente. Incluso debí haber hablado de esta dificultad antes que de la otra.

Dos fenómenos psicológicos tienen lugar en dos distintas consciencias. Cuando decimos que son simultáneos, ¿qué queremos significar? Cuando decimos que un fenómeno físico, que tiene lugar fuera de cada consciencia, sucede antes o después de un fenómeno psicológico, ¿qué queremos significar?

En 1572 Tycho Brahe dio cuenta de una nueva estrella en los cielos. Una conflagración inmensa había sucedido en algún cuerpo celeste muy distante; pero había sucedido mucho tiempo antes: por lo menos fueron necesarios doscientos años para que la luz de tal estrella alcanzara nuestra Tierra. Esta conflagración tuvo lugar, por tanto, antes del descubrimiento de América.[††] Pues bien, cuando consideramos este fenómeno gigantesco, que quizá no tuvo testigo alguno porque los satélites de tal estrella estaban probablemente deshabitados, decimos que este fenómeno es anterior a la formación de la imagen visual de la isla de La Española en la consciencia de Cristóbal Colón. ¿Qué queremos decir con esto?

Una pequeña reflexión es suficiente para comprender que todas estas afirmaciones carecen, por sí mismas, de sentido. Solamente pueden tener uno como resultado de una convención.

VII

Primero debemos preguntarnos cómo es que pudimos haber tenido la idea de poner en el mismo marco tantos mundos impenetrables unos con otros. Quisiéramos representarnos el universo externo, y sólo al hacerlo así sentiríamos que lo hemos comprendido. Sabemos que nunca podremos alcanzar esta representación: nuestra

[††] En realidad, hay constancias históricas que refieren el descubrimiento de América en el año 1000, cuando los vikingos llegaron a lo que ahora es Canadá. Obviamente, Poincaré se refiere al año 1492. Nota del Traductor.

debilidad es demasiado grande. Pero por lo menos deseamos la habilidad de concebir una inteligencia infinita para la cual esta representación fuese posible, una especie de gran consciencia que lo viese todo, y que clasificara todo *en su tiempo*, así como nosotros clasificamos, *en nuestro tiempo*, lo poco que vemos.

Esta hipótesis es, en realidad, tosca e incompleta, porque esta inteligencia suprema solamente podría ser un semidios; infinito en un sentido, sería limitado en otro. Únicamente tendría una recolección imperfecta del pasado, y no podría tener otra, porque, por lo demás, todas las recolecciones serían igualmente presentes para él, y no podría concebir tiempo alguno. Y aún así, cuando hablamos del tiempo - para todo lo que sucede fuera de nosotros - ¿no adoptamos, inconscientemente, esta hipótesis? ¿No nos ponemos en el lugar de este dios imperfecto? ¿No se ponen incluso los ateos en el lugar donde dios estaría si existiese?

Lo que he dicho muestra, quizá, por qué hemos intentado poner todos los fenómenos físicos en el mismo marco. Pero eso no puede pasar para una definición de simultaneidad, debido a que esta inteligencia hipotética, incluso si existiera, sería impenetrable para nosotros. Es entonces necesario buscar algo más.

VIII

Las definiciones ordinarias propias del tiempo psicológico tampoco nos ayudan mucho. Dos hechos psicológicos simultáneos están tan cercanamente unidos que el análisis no puede separarlos sin mutilarlos. ¿Sucede lo mismo con dos hechos físicos? ¿No está mi presente más cercano a mi pasado de ayer que el presente de la estrella Sirio?

También se ha dicho que dos hechos deben considerarse como simultáneos cuando el orden de su sucesión puede invertirse a voluntad. Es evidente que esta definición no es conveniente para dos hechos físicos que suceden muy lejos uno del otro, y que, en lo que les concierne, ya no entenderíamos incluso qué sería esta reversibilidad. Además, primero debe definirse la sucesión por sí misma.

IX

Vamos entonces a tratar de dar una explicación de lo que se entiende por simultaneidad o antecedencia, y para esto analicemos algunos ejemplos.

Yo escribo una carta, que después es leída por el amigo al que se la he enviado. Hay dos hechos que han tenido dos distintas consciencias. Al escribir esta carta, he tenido la imagen visual de ella, y mi amigo ha tenido, a su vez, esta misma imagen visual al leer la carta. Aunque estos dos hechos suceden en mundos impenetrables, no dudo en considerar al primero como anterior al segundo, porque pienso que es su causa.

Si escucho un trueno, y concluyo que ha habido una descarga eléctrica, no dudo en considerar al fenómeno físico como anterior a la imagen auditiva percibida en mi consciencia, porque pienso que es su causa.

He aquí la regla que seguimos, y la única que podemos seguir: cuando un fenómeno nos parece la causa de otro, lo consideramos como anterior. Es, por tanto, a partir de la causa que definimos al tiempo. Pero a menudo, cuando dos hechos nos parecen unidos por una relación constante, ¿cómo reconocemos cuál es la causa y cuál el efecto? Asumimos que el hecho anterior, el antecedente, es la causa del otro, del consecuente. Es entonces a partir del tiempo que definimos la causa. ¿Cómo nos podemos salvar de este *petitio principi*?

Ahora decimos *post hoc, ergo propter hoc*; y después *propter hoc, ergo post hoc*. ¿Debemos escapar de este círculo vicioso?

X

Veamos ahora no cómo hemos tenido éxito en escapar de este círculo vicioso (porque no lo tuvimos completamente), sino cómo intentamos escapar de él.

Yo ejecuto un acto voluntario *A* y siento después una sensación *D*, que considero como consecuencia del acto *A*; por otra parte, por la razón que sea, infiero que esta consecuencia no es inmediata, sino que fuera de mi consciencia han sucedido dos hechos *B* y *C* (que no he presenciado), de tal manera que *B* es el efecto de *A*, *C* es el efecto de *B*, y *D* de *C*.

¿Por qué? Si tengo razones para considerar a los cuatro hechos *A*, *B*, *C*, *D* como unidos uno con otro por una relación causal, ¿por qué distribuirlos en el orden causal *ABCD* y, al mismo tiempo, en el orden cronológico *ABCD*, y no en cualquier otro orden?

Claramente veo que en el acto *A* tengo la sensación de haber estado activo, mientras que al experimentar la sensación *D*, tengo la de haber estado pasivo. Es por esto que considero a *A* como la causa inicial y a *D* como el efecto final; es por esto que

pongo a *A* al principio de la cadena y a *D* al final. ¿Pero por qué poner a *B* antes de *C* y no a *C* antes de *B*?

Si se plantea esta pregunta, la respuesta ordinaria es: sabemos que es *B* la causa de *C* porque *siempre* vemos a *B* suceder antes que *C*. Estos dos fenómenos, cuando son presenciados, suceden en un cierto orden; cuando suceden fenómenos análogos no presenciados, no hay razón para invertir tal orden.

Sin duda esto es cierto, pero hay que tener cuidado. Nunca conocemos directamente los fenómenos físicos *B* y *C*. Lo que conocemos son sensaciones *B'* y *C'* producidas respectivamente por *B* y *C*. Nuestra consciencia inmediatamente nos dice que *B'* precede a *C'* y *suponemos* que *B* y *C* se suceden uno a otro en el mismo orden.

Esta regla parece ser, en realidad, muy natural, y aún así a menudo nos vemos conducidos a apartarnos de ella. Escuchamos el sonido del trueno solamente algunos segundos después de la descarga eléctrica de la nube. De dos rayos de luz, uno distante, el otro más cercano, ¿no puede ser el primero anterior al segundo, incluso cuando el sonido del segundo llegue a nosotros antes que el del primero?

XI

Existe otra dificultad. ¿Realmente tenemos el derecho de hablar de la causa de un fenómeno? Si todas las partes del Universo están interconectadas en cierta medida, cualquier fenómeno no será el efecto de una única causa, sino el resultante de causas infinitamente numerosas; esto es, a menudo se dice, la consecuencia del estado del Universo un momento antes. ¿Cómo enunciar reglas aplicables a circunstancias tan complejas? Y aún es sólo así que estas reglas pueden ser generales y rigurosas.

Para no perdernos en esta infinita complejidad, hagamos una hipótesis más simple. Consideremos tres estrellas, por ejemplo, el Sol, Júpiter y Saturno; pero, para mayor simplicidad, considerémoslas como reducidas a puntos materiales y aisladas del resto del mundo. Las posiciones y las velocidades de tres cuerpos en un instante dado son suficientes para determinar sus posiciones y velocidades en el instante siguiente y, consecuentemente, en cualquier instante. Sus posiciones en el instante t determinan sus posiciones en el instante $t+h$, así como sus posiciones en el instante $t-h$.

Incluso más: la posición de Júpiter en el instante t, junto con la de Saturno en el instante $t+a$, determina la posición de Júpiter en cualquier instante y la de Saturno en cualquier instante.

El agregado de posiciones ocupadas por Júpiter en el instante $t+e$ y Saturno en el instante $t+a+e$ está ligado al agregado de posiciones ocupadas por Júpiter en el instante t y Saturno en el instante $t+a$, por leyes tan precisas como las de Newton, aunque más complicadas. ¿Entonces por qué no considerar uno de estos agregados como la causa del otro, lo que llevaría a considerar como simultáneos al instante t de Júpiter y al instante $t+a$ de Saturno?

Al responder sólo puede haber razones, muy fuertes, es cierto, de conveniencia y simplicidad.

XII

Pero pasemos a ejemplos menos artificiales. Para comprender la definición implícitamente supuesta por los sabios, veámoslos trabajando en las reglas por las cuales investigan la simultaneidad.

Tomaré dos ejemplos simples, la medición de la velocidad de la luz, y la determinación de la longitud.

Cuando un astrónomo dice que algún fenómeno estelar - que su telescopio le revela en este momento - sucedió no obstante hace cincuenta años, intentamos entender el significado de esto, y para tal fin, primero debemos preguntarle cómo es que sabe eso, esto es, cómo es que ha medido la velocidad de la luz.

Ha comenzado por *suponer* que la luz tiene una velocidad constante y, en particular, que su velocidad es la misma en todas direcciones. Este es un postulado sin el cual ni siquiera podría intentarse medir esta velocidad. Este postulado nunca pudo ser verificado directamente por experimento alguno; podría ser contradicho por él si los resultados de distintas mediciones no fuesen concordantes. Debemos sentirnos afortunados de que esta contradicción nunca haya sucedido y de que las pequeñas discordancias que pueden suceder pueden fácilmente ser explicadas.

El postulado, en todo caso, es parecido al principio de razón suficiente, y ha sido aceptado por todos. Lo que deseo enfatizar es que nos proporciona una nueva regla para la investigación de la simultaneidad, completamente diferente de la que he enunciado anteriormente.

Asumido este postulado, veamos cómo ha sido medida la velocidad de la luz. Ustedes saben que Roemer utilizó eclipses de los satélites de Júpiter, y buscó qué tanto

caía el evento en su predicción. ¿Pero cómo se hace esta predicción? Se hace con la ayuda de leyes astronómicas, por ejemplo, la ley de Newton.

¿No podrían ser igual de bien explicados los hechos observados si atribuyésemos a la velocidad de la luz un valor un poco distinto del adoptado, y supusiésemos la ley de Newton de manera aproximada? Esto solamente llevaría a reemplazar la ley de Newton por una más complicada. De manera que para la velocidad de la luz se adopta un valor, para que las leyes astronómicas compatibles con este valor sean tan simples como sea posible. Cuando los navegantes o los geógrafos determinan una longitud, tienen que resolver justo el problema que estamos discutiendo; deben, sin estar en París, calcular el tiempo de París. ¿Cómo es que lo consiguen? Llevan un cronómetro ajustado para París. El problema cualitativo de la simultaneidad está hecho para depender del problema cuantitativo de la medición del tiempo. No necesito ocuparme de las dificultades relativas a este último problema, porque arriba ya lo he hecho en profundidad.

O también puede observarse un fenómeno astronómico, tal como un eclipse lunar, y suponer que este fenómeno es percibido simultáneamente desde todos los puntos de la Tierra. Eso no es del todo cierto, porque la propagación de la luz no es instantánea. Si se desease exactitud absoluta, habría una corrección que hacer de acuerdo con una regla complicada.

O, finalmente, consideremos al telégrafo. Primeramente es claro que la recepción de una señal en Berlín, por ejemplo, ocurre después del envío de esta misma señal desde París. Esta es la regla de causa y efecto analizada antes. ¿Pero qué tanto después? En general, la duración de la transmisión es descuidada y ambos eventos son considerados como simultáneos. Pero, para ser rigurosos, aún tendría que hacerse una pequeña corrección a partir de un cálculo complicado; en la práctica no se hace, porque bien podría considerarse un error de observación; su necesidad teórica es, no obstante, la de una definición rigurosa. De esta discusión, deseo enfatizar dos cosas: (1) Las reglas aplicadas son sumamente diversas. (2) Es difícil separar el problema cualitativo de la simultaneidad del problema cuantitativo de la medición del tiempo; no importa si se utiliza un cronómetro, o si debe contarse la velocidad de una transmisión, tal como la de la luz, porque tal velocidad no puede ser medida sin *medir* un tiempo.

XIII

Para concluir: No tenemos una intuición directa de la simultaneidad, ni de la igualdad de dos duraciones. Si pensamos tener esta intuición, es una ilusión. La remplazamos con la ayuda de ciertas reglas que aplicamos casi siempre sin tomar recuento de ellas.

¿Cuál es la naturaleza de estas reglas? No hay ninguna regla general, ni ninguna regla rigurosa: solamente una multitud de pequeñas reglas aplicables a cada caso particular.

Estas reglas no están impuestas sobre nosotros y podríamos divertirnos inventando otras; pero no podrían ser desechadas sin complicar extremadamente la enunciación de las leyes de la física, la mecánica y la astronomía.

Por consiguiente, escogemos estas reglas no porque sean verdaderas, sino porque son las más convenientes, y podemos recapitularlas como sigue: “La simultaneidad de dos eventos, o el orden de su sucesión, la igualdad de dos duraciones, deben definirse de tal forma que la enunciación de las leyes naturales sea tan simple como sea posible. En otras palabras, todas estas reglas, todas estas definiciones, son solamente el fruto de un oportunismo inconsciente”.

CAPÍTULO III

LA NOCIÓN DEL ESPACIO

1. INTRODUCCIÓN

En los artículos que hasta ahora he dedicado al espacio, he enfatizado, sobre todo, los problemas que surgen a partir de la geometría no euclidiana, a la vez que he dejado completamente a un lado otras cuestiones de más difícil abordaje, como las que pertenecen al número de dimensiones. Todas las geometrías que he considerado han tenido, pues, una base común, a saber, el continuo tridimensional igual para todas y que se diferenciaba él mismo únicamente por las figuras trazadas en él o por las mediciones hechas a este mismo continuo.

En este continuo, primitivamente amorfo, podemos imaginar una red de líneas y superficies, y después podemos convenir en considerar las mallas de esta red como iguales unas con otras, y es únicamente después de esta convención que este continuo, tras ser medible, se vuelve espacio euclidiano o no euclidiano. De este continuo amorfo pueden, por tanto, surgir de manera indiferente uno o el otro de estos dos espacios, así como sobre una hoja en blanco pueden trazarse de manera indiferente una recta o un círculo.

En el espacio conocemos triángulos rectilíneos cuya suma de sus ángulos es igual a dos ángulos rectos; pero igualmente conocemos triángulos curvilíneos cuya suma de sus ángulos es menor a dos ángulos rectos. La existencia del primer tipo de triángulos no es más dudosa que la existencia del segundo tipo. Dar el nombre de rectas a los lados del primer tipo es adoptar una geometría euclidiana; dar el nombre de rectas a los lados del segundo es adoptar una geometría no euclidiana. ¿De manera que preguntar qué geometría es propio adoptar es preguntar a qué línea es propio llamar recta?

Es evidente que el experimento no puede resolver tal cuestión. Uno no preguntaría, por ejemplo, si el experimento puede decidir si debo llamar *AB* o *CD* a una recta. Por otra parte, tampoco puedo decir que no tengo derecho de dar el nombre de rectas a los lados de los triángulos no euclidianos porque no están en conformidad con la eterna idea de recta que tengo gracias a la intuición. Concedo, es cierto, que tengo

una idea intuitiva sobre el lado del triángulo euclidiano, pero igualmente tengo una idea intuitiva sobre el lado del triángulo no euclidiano. ¿Por qué tendría el derecho de aplicar el nombre de recta a la primera de estas ideas y no a la segunda? ¿Dónde es que estas sílabas forman una parte integrante de esta idea intuitiva? Evidentemente, cuando decimos que la recta euclidiana es una recta *verdadera* y que la recta no euclidiana no es una recta verdadera, simplemente decimos que la primera idea intuitiva corresponde a un objeto *más notable* que la segunda. ¿Pero cómo decidimos que este objeto es más notable? Esta cuestión la he investigado en *Ciencia e Hipótesis*.[‡‡]

Es aquí en donde vimos tomar parte a la experiencia. Si la recta euclidiana es más notable que la no euclidiana, lo es principalmente porque difiere poco de ciertos objetos naturales notables y porque la recta no euclidiana difiere mucho. Pero, podría decirse, la definición de la recta no euclidiana es artificial; si la adoptamos por un momento, veremos que dos círculos de distinto radio reciben, ambos, el nombre de rectas no euclidianas, mientras que de dos círculos del mismo radio, uno puede satisfacer la definición sin que el otro sea capaz de hacerlo, y después, si transportamos una de estas así llamadas rectas sin deformarla, cesará de ser una recta. ¿Pero por qué grado de rigor consideramos como iguales estas dos figuras que los geómetras euclidianos llaman dos círculos con el mismo radio? Es porque, al transportar una de ellas sin deformarla, porque hacerla coincidir con la otra. ¿Y por qué decimos que esta transportación se hace sin deformación? Es imposible dar una buena razón para ello. De entre todos los movimientos concebibles, hay algunos que, según los geómetras euclidianos, no están acompañados por deformación alguna; pero hay otros que, según los geómetras no euclidianos, tampoco estarían acompañados por deformación alguna. En los primeros, llamados movimientos euclidianos, las rectas euclidianas se mantienen como rectas euclidianas, y las rectas no euclidianas no se mantienen como rectas no euclidianas. En los movimientos del segundo tipo, o movimientos no euclidianos, las rectas no euclidianas se mantienen como rectas no euclidianas, y las rectas euclidianas no se mantienen como rectas euclidianas. No ha sido, por tanto, demostrada la irracionalidad de llamar rectas a los lados de los triángulos no euclidianos; solamente se ha demostrado que eso sería irracional si uno continuara llamando a los movimientos euclidianos movimientos sin deformación. Pero al mismo tiempo se ha mostrado que

[‡‡] Véase, en ese libro, especialmente la Parte II, dedicada al Espacio, y los capítulos que contiene. Traducción mía. Nota del Traductor.

sería igualmente irracional llamar rectas a los lados de los triángulos euclidianos si los movimientos no euclidianos fuesen llamados movimientos sin deformación.

Ahora bien, cuando decimos que los movimientos euclidianos con los *verdaderos* movimientos sin deformación, ¿qué queremos significar? Simplemente queremos significar que son *más notables* que los otros. ¿Y por qué son más notables? Es porque ciertos cuerpos naturales notables, los cuerpos sólidos, experimentan movimientos muy similares.

Y entonces cuando preguntamos: ¿Puede concebirse un espacio no euclidiano?, eso significa: ¿Podemos imaginar un mundo donde habría objetos naturales notables afectando - casi - la forma de rectas no euclidianas, y objetos naturales notables experimentando frecuentemente movimientos - casi - similares a los movimientos no euclidianos? He demostrado en *Ciencia e Hipótesis*[§§] que a esta cuestión debemos responder que sí.

Si todos los cuerpos en el Universo se dilataran simultáneamente y en la misma proporción, no tendríamos medio alguno para percibirlo, porque todos nuestros instrumentos de medición crecerían al mismo tiempo que los objetos que miden. El mundo, después de esta dilatación, continuaría con su curso sin que nada nos informase de tan considerable evento. En otras palabras, dos mundos similares uno con otro (entendiendo la palabra *similitud* en el sentido de Euclides, libro VI) serían absolutamente indistinguibles. Pero hay más: los mundos serían indistinguibles no sólo si fuesen iguales o similares, esto es, si pudiésemos pasar de uno al otro cambiando los ejes de las coordenadas, o cambiando la escala a la que las longitudes se refieren; aún serían indistinguibles si pudiésemos pasar de uno al otro por cualquier “punto de transformación”. Permítanme explicar esto. Supongo que a cada punto de un mundo corresponde uno y sólo un punto del otro, e inversamente. Además, que las coordenadas de un punto son funciones continuas, *de otro modo completamente arbitrarias*, del punto correspondiente. Supongo además que a cada objeto del primer mundo le corresponde, en el segundo, un objeto de la misma naturaleza puesto precisamente en el punto correspondiente. Finalmente supongo que esta correspondencia, satisfecha en el instante inicial, se mantiene indefinidamente. No tendríamos medios para distinguir estos dos mundos uno del otro. La relatividad del espacio no es comúnmente entendida en un sentido tan general; pero es así, no obstante, como sería propio entenderla.

[§§] Ibídem. Nota del Traductor.

Si uno de estos universos es nuestro mundo euclidiano, lo que sus habitantes llamaran recta sería nuestra recta euclidiana; pero lo que los habitantes del segundo mundo llamaran recta sería una curva con las mismas propiedades en relación con el mundo que habitan y en relación con los movimientos que llamarían movimientos sin deformación. Su geometría sería, por tanto, geometría euclidiana, pero su recta no sería nuestra recta euclidiana. Será su transformada por el punto de transformación que se traslada de nuestro mundo al de ellos. Las rectas de estos hombres no serían nuestras rectas, pero tendrían, entre ellas, las mismas relaciones unas con otras que nuestras rectas. Es en este sentido que digo que su geometría sería la nuestra. Si después de todo quisiésemos proclamar que estos habitantes del segundo mundo se engañan a sí mismos, que su recta no es la verdadera recta, si aún no queremos admitir que tal afirmación no tiene sentido, por lo menos debemos confesar que estas personas carecen de medio alguno para reconocer su error.

2. GEOMETRÍA CUALITATIVA

Todo lo anterior es relativamente sencillo de comprender, y lo he repetido tanto tantas veces que considero innecesario explayar más sobre la materia. El espacio euclidiano no es una forma impuesta sobre nuestra sensibilidad, debido a que podemos imaginarnos un espacio no euclidiano; pero ambos espacios, euclidiano y no euclidiano, tienen una base común, aquel continuo amorfo sobre el cual hablé al principio. De este continuo podemos obtener ya sea un espacio euclidiano o un espacio lobachevskiano, así como podemos, al trazar sobre él una graduación propia, transformar un termómetro no graduado en un termómetro de Fahrenheit o de Réaumur.

Y entonces surge una cuestión: ¿No es este continuo amorfo - que nuestro análisis ha permitido sobrevivir - una forma impuesta sobre nuestra sensibilidad? Si es así, debemos agrandar la prisión en donde está confinada esta sensibilidad, aunque siempre será una prisión.

Este continuo tiene un cierto número de propiedades exentas de toda idea de medición. El estudio de estas propiedades es el objeto de una ciencia que ha sido cultivada por muchos grandes geómetras, en particular por Riemann y Betti, y que ha recibido el nombre de análisis situs. En esta ciencia, la abstracción está compuesta de cada idea cuantitativa y si, por ejemplo, comprobamos que sobre una línea el punto *B* se encuentra entre los puntos *A* y *C*, deberemos contentarnos con esta comprobación y no

molestarnos en saber si la línea *ABC* es recta o curva, ni si la longitud *AB* es igual a la longitud *BC*, o si es el doble de grande.

Los teoremas del análisis situs tienen, por tanto, esta peculiaridad: que seguirán siendo ciertos aún cuando las figuras fuesen copiadas por un dibujante inexperto que cambie gravemente todas las proporciones y reemplace las rectas por líneas más o menos sinuosas. En términos matemáticos, no se ven alteradas por cualquiera que sea el "punto de transformación". A menudo se dice que la geometría métrica es cuantitativa, mientras que la geometría proyectiva es puramente cualitativa. Eso no es del todo cierto. La recta aún se distingue de otras líneas por propiedades que se mantienen cuantitativas en algunos aspectos. La verdadera geometría cualitativa es, por tanto, el análisis situs.

Las mismas cuestiones que surgieron a propósito de las verdades de la geometría euclidiana, surgen ahora a propósito de los teoremas del análisis situs. ¿Se obtienen a partir del razonamiento deductivo? ¿Son convenciones disfrazadas? ¿Son verdades experimentales? ¿Son las características de una forma impuesta ya sea sobre nuestra sensibilidad o sobre nuestro entendimiento?

Simplemente quiero hacer notar que las últimas dos soluciones se excluyen una a la otra. No podemos admitir, al mismo tiempo, que es imposible imaginar un espacio de cuatro dimensiones y que la experiencia nos prueba que el espacio tiene tres dimensiones. El experimentador pregunta a la naturaleza: ¿es esto o aquello?, y no puede preguntar esto sin imaginar ambos términos de la alternativa. Si fuese imposible imaginar uno de estos términos, sería inútil y además imposible consultar a la experiencia. No se necesita observar para saber que la manecilla de un reloj no está marcando la hora 15, porque de antemano sabemos que solamente hay 12, y no podemos observar la marca 15 para ver si la manecilla está ahí, porque esta marca simplemente no existe.

Nótese, de igual manera, que en el análisis situs los empiristas están librados de una de las objeciones más graves que pueden hacerse sobre ellos, de aquella que hace absolutamente vano - y además lo hace por adelantado - todo esfuerzo de aplicar sus tesis a las verdades de la geometría euclidiana. Estas verdades son rigurosas y toda experimentación sólo puede ser aproximativa. En el análisis situs, los experimentos aproximativos pueden resultar suficientes para producir un teorema riguroso y, por ejemplo, si se observa que el espacio no puede tener ya sea dos o menos que dos dimensiones, ni cuatro o más que cuatro, estamos entonces seguros que tiene exactamente tres, porque no puede tener dos y media o tres y media.

De todos los teoremas del análisis situs el más importante es el que afirma que el espacio tiene tres dimensiones. Esto es lo que vamos a considerar, y debemos poner la cuestión en estos términos: cuando afirmamos que el espacio tiene tres dimensiones, ¿qué queremos decir?

3. EL CONTINUO FÍSICO DE VARIAS DIMENSIONES

He explicado en *Ciencia e Hipótesis* de dónde derivamos la noción de continuidad física y cómo la de continuidad matemática ha surgido de ella. Sucede que somos capaces de distinguir dos impresiones una de la otra, mientras que cada una de éstas es indistinguible de una tercera. Así, fácilmente podemos distinguir un peso de 12 gramos de un peso de 10 gramos, mientras que un peso de 11 gramos no puede ser distinguido ni de uno ni de otro peso. Tal declaración, traducida en símbolos, puede ser escrita como sigue:

$$A = B, B = C, A < C.$$ [***]

Esta sería la fórmula del continuo físico, tan cruda como la experiencia nos la da, y de donde surge una intolerable contradicción que ha sido evitada por la introducción del continuo matemático. Este continuo matemático es una escala cuyos pasos (números conmensurables o inconmensurables) son infinitos en número, pero son exteriores unos con otros en lugar de estar invadidos unos con otros como sucede con los elementos del continuo físico, en conformidad con la fórmula precedente.

El continuo físico es, por decirlo de alguna manera, una nebulosa no resuelta; incluso los instrumentos más perfectos no alcanzarían su resolución. Sin duda, si midiésemos los pesos con una buena balanza en lugar de con la mano, podríamos distinguir el peso de 11 gramos de aquellos de 10 y 12 gramos, y nuestra fórmula sería:

$$A < B, B < C, A < C.$$

Pero siempre encontraremos, entre A y B y entre B y C, nuevos elementos D y C, de tal forma que

$$A = D, D = B, A < B; B = E, E = C, B < C,$$

por lo que la dificultad únicamente habrá disminuido y la nebulosa siempre permanecerá irresoluta. La mente, por sí misma, puede resolver esto y el continuo matemático es la nebulosa resuelta en estrellas.

[***] Esto es, si damos a A el valor de 10 gramos, a B el valor de 11 gramos, y a C el de 12 gramos. Nota del Traductor.

Todavía en este punto no hemos introducido la noción del número de dimensiones. ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que un continuo matemático o un continuo físico tienen dos o tres dimensiones?

Antes que nada debemos introducir la noción de corte, estudiando primero los continuos físicos. Hemos visto qué caracteriza al continuo físico. Cada uno de los elementos de este continuo consiste en una variedad de impresiones; y puede suceder que un elemento no pueda ser discriminado de otro elemento del mismo continuo, si este nuevo elemento corresponde a una variedad de impresiones no lo suficientemente distinta, o, por el contario, que tal discriminación sea posible; finalmente, puede suceder que dos elementos indistinguibles de un tercero puedan, no obstante, distinguirse uno del otro.

Postulado lo anterior, si *A* y *B* son dos elementos distinguibles de un continuo *C*, puede encontrarse una serie de elementos $E_1, E_2, ..., E_n$, todos pertenecientes a este mismo continuo *C* y de tal forma que cada uno de ellos es indistinguible del precedente, que E_1 es indistinguible de *A* y E_n indistinguible de *B*. Por tanto, podemos ir de *A* a *B* por una ruta continua y sin abandonar *C*. Si se cumple con esta condición para cualesquiera dos elementos *A* y *B* del continuo *C*, podemos decir que este continuo *C* es todo de una sola pieza. Ahora distingamos ciertos de los elementos de *C* que pueden o bien ser todos distinguibles unos de otros, o formar por sí mismos uno o varios continuos. La colección de los elementos así arbitrariamente escogidos entre todos aquellos de *C* formará lo que llamaré el *corte* o los *cortes*.

Tomemos de *C* cualesquiera dos elementos *A* y *B*. O bien también podemos encontrar una serie de elementos $E_1, E_2, ..., E_n$, tal que: (1) todos pertenecen a *C*; (2) cada uno de ellos es indistinguible del siguiente, E_1 es indistinguible de *A* y E_n de *B*; (3) *y además, que ninguno de los elementos E es indistinguible de cualquier elemento del corte*. O bien, por el contrario, en cada una de las series $E_1, E_2, ..., E_n$ que satisfagan las primeras dos condiciones, habrá un elemento *E* indistinguible de uno de los elementos del corte. En el primer caso, podemos ir de *A* a *B* por una ruta continua sin abandonar *C* y *sin que se encuentren los cortes*; en el segundo caso es imposible.

Si entonces, para cualesquiera dos elementos *A* y *B* del continuo *C*, es el primer caso el que se presenta, debemos decir que *C* se mantiene todo de una sola pieza a pesar de los cortes.

Así, si escogemos los cortes de cierta manera, de otra forma arbitrariamente, puede suceder o bien que el continuo se mantenga todo en una sola pieza, o que no se mantenga todo de una sola pieza. En esta última hipótesis, debemos decir que está *dividido* por los cortes.

Debe observarse que todas estas definiciones están construidas únicamente a partir de este hecho muy simple, a saber, que dos variedades de impresiones a veces pueden ser discriminadas, a veces no. Lo anterior postulado, si, para *dividir* un continuo, resulta suficiente considerar como cortes a un cierto número de elementos todos distinguibles unos de otros, decimos que este continuo es de *una dimensión*; si, por el contrario, para dividir un continuo es necesario considerar como cortes a un sistema de elementos que por sí mismos forman uno o varios continuos, debemos decir que este continuo es de *varias dimensiones*.

Si para dividir un continuo *C*, resultan suficientes cortes formando uno o varios continuos de una dimensión, debemos decir que *C* es un continuo de *dos dimensiones*; si son suficientes los cortes que forman uno o varios continuos de dos dimensiones como mucho, debemos decir que *C* es un continuo de *tres dimensiones*, y así sucesivamente.

Para justificar esta definición, resulta propio ver si es de esta forma como los geómetras han introducido la noción de tres dimensiones al principio de sus trabajos. Ahora bien, ¿qué es lo que vemos? Usualmente comienzan por definir superficies como los límites de sólidos o piezas del espacio, líneas como los límites de superficies, puntos como los límites de líneas, y afirman que el mismo procedimiento ya no puede hacerse más.

Esta es justamente la idea descrita arriba: para dividir al espacio, son necesarios cortes llamados superficies; para dividir superficies, son necesarios cortes llamados líneas; para dividir líneas, son necesarios cortes llamados puntos; no podemos ir más lejos, porque el punto no puede ser dividido, de tal suerte que el punto no es un continuo. Entonces las líneas que pueden dividirse por cortes que no son continuos serán continuos de una dimensión; superficies que pueden dividirse por cortes continuos de una dimensión serán continuos de dos dimensiones; finalmente, el espacio que puede dividirse por cortes continuos de dos dimensiones será un continuo de tres dimensiones.

De esta forma, la definición que he dado no difiere esencialmente de las definiciones usuales; únicamente me he esforzado por darle una forma aplicable no al continuo matemático, sino al continuo físico, que por sí mismo es susceptible de representación y también de retener toda su precisión. Más aún, vemos que esta

definición es aplicable no solamente al espacio; que en todo lo que cae bajo nuestros sentidos encontramos las características del continuo físico, y que permitiría la misma clasificación; que no sería difícil encontrar ahí ejemplos de continuos de cuatro o cinco dimensiones, en el sentido de la definición precedente; tales ejemplos se producen, por sí mismos, en la mente.

Finalmente debería explicar, si tuviese el tiempo, que esta ciencia, de la que hablé antes y a la que Riemann dio el nombre de análisis situs, nos enseña a hacer distinciones entre continuos del mismo número de dimensiones, y que la clasificación de estos continuos descansa solamente sobre la consideración de cortes.

De esta noción ha surgido la del continuo matemático de varias dimensiones de la misma forma que el continuo físico de una dimensión engendró al continuo matemático de una dimensión. La fórmula

$$A > C, A = B, B = C,$$

que resumió los datos de la experiencia cruda implicaba una intolerable contradicción. Para librarse de ella, fue necesario introducir una nueva noción que a la vez respetara las características esenciales del continuo físico de varias dimensiones. El continuo matemático de una dimensión admite una escala cuyas divisiones, infinitas en número, corresponden a los diferentes valores - conmensurables o no - de una misma magnitud. Para tener un continuo matemático de n dimensiones, es suficiente con tomar n escalas iguales cuyas divisiones correspondan a diferentes valores de n magnitudes independientes llamadas coordenadas. Tendremos así una imagen del continuo físico de n dimensiones, y esta imagen será tan fiel como pueda ser después de la determinación de no permitir la contradicción de la que hablé antes.

4. LA NOCIÓN DE PUNTO

Parece ser que la cuestión que planteamos al principio de esta discusión está ahora resuelta. Cuando afirmamos que el espacio tiene tres dimensiones, queremos decir que la variedad de puntos del espacio satisface la definición que hemos dado del continuo físico de tres dimensiones. Contentarnos con tal afirmación sería suponer que sabemos qué es la variedad de puntos en el espacio, o incluso un punto en el espacio.

Ahora bien, eso no es tan simple como uno podría suponer. Todo mundo cree saber qué es un punto, y es precisamente porque creemos conocerlo también que ni siquiera nos molestamos en definirlo. Seguramente no se nos puede exigir saber cómo

definirlo, porque, al volver de definición a definición, debe llegar un momento en el que debamos detenernos. ¿Pero en qué momento debemos detenernos?

Debemos detenernos cuando hayamos alcanzado un objeto que cae bajo nuestros sentidos o que podamos representarnos; la definición entonces será inútil. Nosotros no definimos una oveja a un niño, más bien le decimos: *ve* la oveja.

Debemos entonces preguntarnos si es posible representarnos un punto del espacio. Aquellos que responden afirmativamente no reflexionan que lo que se representan, en realidad, es un punto blanco hecho con un gis sobre un pizarrón, o un punto negro hecho con una pluma sobre un papel blanco, y que únicamente pueden representarse un objeto o mejor dicho las impresiones que este objeto tiene sobre sus sentidos.

Cuando intentan representarse un punto, representan las impresiones que sienten con objetos muy pequeños. Es innecesario añadir que dos objetos distintos, aunque ambos muy pequeños, pueden producir impresiones extremadamente diferentes, pero no trataré con esta dificultad, que aún requeriría algún tipo de discusión.

Pero tal no es la cuestión; no es suficiente con representar *un* punto, es necesario representar *un cierto* punto y tener los medios para distinguirlo de *otro* punto. Y, en realidad, para que podamos aplicar a un continuo la regla expuesta antes y por la cual uno puede reconocer el número de sus dimensiones, debemos confiar en el hecho de que dos elementos de este continuo a veces pueden y a veces no pueden ser distinguidos. Es necesario, por lo tanto, que podamos saber - en ciertos casos - cómo representarnos un elemento *específico* y cómo distinguirlo de *otro* elemento.

La cuestión es saber si el punto que me representé hace una hora es el mismo que ahora me represento, o si es un punto distinto. En otras palabras, ¿cómo sabemos si el punto ocupado por el objeto A en el instante α es el mismo punto ocupado por el objeto B en el instante β? O, incluso mejor, ¿qué significa esto?

Estoy sentado en mi cuarto y un objeto está puesto sobre mi mesa. Durante un segundo no me muevo, y nadie toca tal objeto. Estoy tentado a decir que el punto A que este objeto ocupó al principio de este segundo es idéntico al punto B que ocupa al final. De ninguna manera; del punto A al punto B hay 30 kilómetros, porque el objeto ha sido llevado según el movimiento de la Tierra. No podemos saber si un objeto, sea grande o pequeño, no ha cambiado su posición absoluta en el espacio, y no solamente no podemos afirmarlo, sino que esta afirmación no tiene sentido y, en cualquier caso, no puede corresponder a representación alguna.

Pero entonces podemos preguntarnos si la posición relativa de un objeto con respecto a otros objetos ha cambiado o no y, antes que nada, si la posición relativa de este objeto ha cambiado con respecto a nuestro cuerpo. Si las impresiones que este objeto tienen sobre nosotros no han cambiado, nos vemos inclinados a juzgar que tampoco ha cambiado esta posición relativa; si han cambiado, debemos juzgar que este objeto ha cambiado en estado o en posición relativa. Queda decidir cuál de las *dos* posibilidades. He explicado, en *Ciencia e Hipótesis*, cómo hemos llegado a distinguir los cambios de posición, y regresaré a ello más adelante. Hemos llegado a conocer, por consiguiente, si la posición relativa de un objeto con respecto a nuestro cuerpo se ha o no mantenido la misma.

Si ahora observamos que dos cuerpos han conservado su posición relativa con respecto a nuestro cuerpo, concluimos que la posición relativa de estos dos objetos con respecto a uno con el otro no ha cambiado; pero llegamos a esta conclusión solamente por un razonamiento indirecto. La única cosa que conocemos directamente es la posición relativa de los objetos con respecto a nuestro cuerpo. *A fortiori*, es únicamente a partir de un razonamiento indirecto que pensamos saber (y, además, esta creencia es engañosa) si la posición absoluta del objeto ha cambiado.

En pocas palabras, el sistema de ejes coordenados al que naturalmente referimos todo objeto exterior es un sistema de ejes invariablemente ligado a nuestro cuerpo, y llevado con nosotros.

Es imposible representarse a uno mismo el espacio absoluto; cuando intento representarme simultáneamente objetos y a mí mismo en movimiento en el espacio absoluto, en realidad me represento a mí mismo sin movimiento y viendo alrededor mío distintos objetos en movimiento, y a un hombre exterior a mí, pero que convengo en llamarlo mí.

¿Se resolverá la dificultad si concordamos en referir todo a estos ejes ligados a nuestro cuerpo? ¿Sabremos entonces qué es un punto así definido por su posición relativa con respecto a nosotros? Muchas personas responderían que sí y dirían que "localizan" objetos exteriores.

¿Qué significa esto? Localizar un objeto simplemente significa representarse los movimientos necesarios para alcanzarlo. Permítanme explicar esto. No se trata de una cuestión de representar los movimientos por sí mismos en el espacio, sino únicamente de representarse las sensaciones musculares que acompañan estos movimientos y que no presuponen la preexistencia de la noción de espacio.

Si suponemos dos objetos distintos que sucesivamente ocupan la misma posición relativa con respecto a nosotros, las impresiones que estos objetos tienen sobre nosotros serán muy diferentes; si los localizamos en el mismo punto, es simplemente porque es necesario hacer los mismos movimientos para alcanzarlos. Aparte de eso, uno simplemente no vería qué podrían tener en común.

Pero, dado un objeto, podemos concebir muchas series distintas de movimientos que igualmente nos permitirían alcanzarlo. Si, por tanto, nos representamos un punto al representarnos la serie de sensaciones musculares que acompañan los movimientos que nos permiten alcanzar tal punto, habrá entonces muchas maneras, completamente distintas, de representarnos el mismo punto. Si uno no está satisfecho con esta solución y desea, por ejemplo, incluir las sensaciones visuales junto con las musculares, habrá una o dos maneras más de representarse este mismo punto, y la dificultad únicamente habrá crecido. En cualquier caso, surge la siguiente cuestión: ¿Por qué pensamos que todas estas representaciones, tan distintas entre sí, no obstante representan al mismo punto?

Otra observación más: he dicho que es a nuestro cuerpo a donde naturalmente referimos los objetos exteriores; que llevamos a todos lados con nosotros un sistema de ejes al que referimos todos los puntos del espacio, y que este sistema de ejes parece estar invariablemente ligado a nuestro cuerpo. Debe notarse que, en estricto sentido, no podemos hablar de ejes invariablemente ligados al cuerpo a menos que las distintas partes de este cuerpo estuviesen, por sí mismas, invariablemente ligadas unas con otras. Como este no es el caso, antes de referir los objetos exteriores a estos ejes ficticios, debemos suponer a nuestro cuerpo llevado de vuelta a la actitud inicial.

5. LA NOCIÓN DE DESPLAZAMIENTO

He mostrado en *Ciencia e Hipótesis* el preponderante papel desempeñado por los movimientos de nuestro cuerpo en la génesis de la noción del espacio. Para un ser completamente inmóvil, no habría ni espacio ni geometría alguna; en vano se desplazarían los objetos exteriores sobre él, y las variaciones que estos desplazamientos tendrían en sus impresiones no serían atribuidas a cambios de posición, sino a simples cambios de estado. Este ser carecería de medio alguno para distinguir estos dos tipos de cambios, y esta distinción, fundamental para nosotros, no tendría ningún sentido para él.

Los movimientos que imprimimos sobre nuestros miembros tienen, como efecto, la variante de las impresiones producidas sobre nuestros sentidos por los objetos externos. Otras causas pueden, de igual forma, hacer que varíen, pero nos vemos llevados a distinguir los cambios producidos por nuestros propios movimientos y fácilmente podemos discriminarlos por dos razones: (1) porque son voluntarios; (2) porque están acompañados por sensaciones musculares.

De tal forma que naturalmente dividimos los cambios que nuestras impresiones pueden experimentar en dos categorías a las que quizá he dado una designación inapropiada: (1) los cambios internos, que son voluntarios y están acompañados por sensaciones musculares; (2) los cambios externos, que tienen las características opuestas.

Entonces observamos que, entre los cambios externos, hay algunos que pueden corregirse, gracias a una cambio interno que traiga todo de vuelta al estado original. Otros no pueden corregirse de esta forma (es así que, cuando un objeto exterior es desplazado, podemos entonces, al cambiar nuestra propia posición, colocarnos - en lo que respecta a este objeto - en la misma posición relativa que antes, para reestablecer el agregado de impresiones original; si tal objeto no fue desplazado, sino que cambió su estado, esto es imposible). De ahí viene una nueva distinción entre los cambios externos: aquellos que podemos corregir los llamaremos cambios de posición; a los otros, cambios de estado.

Pensemos, por ejemplo, en una esfera con un hemisferio azul y el otro rojo. Primero se presenta ante nosotros el hemisferio azul, y después la esfera gira y se nos presenta el hemisferio rojo. Ahora pensemos en un jarrón esférico conteniendo un líquido azul que se vuelve rojo como consecuencia de una reacción química. En ambos casos, la sensación del rojo ha reemplazado a aquella del azul; nuestros sentidos han experimentando las mismas impresiones que se han sucedido en el mismo orden, y aún así consideramos estos cambios como distintos: el primero es un desplazamiento, el segundo un cambio de estado. ¿Por qué? Porque, en el primer caso, es suficiente con que rodeemos a la esfera y nos coloquemos en el lado opuesto al rojo, para reestablecer la sensación azul original.

Eso no es todo. Si ambos hemisferios, en lugar de ser rojo y azul, hubiesen sido amarillo y verde, ¿cómo hubiésemos interpretado la revolución de la esfera? Antes, el rojo sucedió al azul, ahora el verde sucede al amarillo; y, aún así, decimos que ambas esferas han experimentado la misma revolución, y que cada una ha girado sobre su eje.

Con todo, no podemos decir que el verde es al amarillo como el rojo es al azul. ¿Cómo es entonces que decidimos que ambas esferas han experimentado el *mismo* desplazamiento? Evidentemente porque, tanto en un caso como en el otro, somos capaces de reestablecer la sensación original al rodear la esfera haciendo los mismos movimientos, y sabemos que hemos hecho los mismos movimientos porque hemos sentido las mismas sensaciones musculares. No necesitamos, por tanto, saber geometría de antemano y representarnos los movimientos de nuestro cuerpo en el espacio geométrico.

Otro ejemplo más: un objeto se desplaza ante mi ojo. Primero su imagen estaba formada en el centro de la retina; después estuvo formada en el borde. La primera sensación me fue llevada por una fibra nerviosa terminando en el centro de la retina; la segunda por *otra* fibra nerviosa comenzando en el borde de la retina. Estas dos sensaciones con cualitativamente distintas porque, de otra forma, ¿cómo podría distinguirlas?

¿Por qué entonces decido que estas dos sensaciones, cualitativamente distintas, representan la misma imagen desplazada? Es porque *puedo seguir el objeto con mi ojo* y, por un desplazamiento voluntario del ojo acompañado por sensaciones musculares, llevar de nuevo la imagen al centro de la retina y reestablecer la sensación original.

Supongo que la imagen de un objeto rojo ha ido del centro *A* al borde *B* de la retina. Después, que la imagen de un objeto azul ha ido, a su vez, del centro *A* al borde *B* de la retina. He decidido que estos dos objetos han experimentado el *mismo* desplazamiento. ¿Por qué? Porque, en ambos casos, he sido capaz de reestablecer la sensación original, y para hacerlo he ejecutado el *mismo* movimiento ocular, y sé que mi ojo ha ejecutado el mismo movimiento porque he sentido las *mismas* sensaciones musculares.

Si no pudiese mover mi ojo, ¿tendría razón alguna para suponer que la sensación del rojo en el centro de la retina es a la sensación del rojo al borde de la misma como la del azul al centro es a la del azul al borde? Únicamente tendría cuatro sensaciones cualitativamente distintas, y si me preguntasen si están conectadas por la proporción recién establecida, toda la cuestión me parecería ridícula, tal como si me preguntasen si hay una proporción análoga entre una sensación auditiva, una táctil, y una olfativa.

Consideremos ahora los cambios internos, esto es, aquellos producidos por los movimientos voluntarios de nuestro cuerpo y que están acompañados por cambios

musculares. Tales cambios dan lugar a las siguientes dos observaciones, análogas a aquellas que hemos hecho sobre el tema de los cambios externos.

1. Puedo suponer que mi cuerpo se ha movido de un punto a otro pero se ha mantenido la misma *postura*: todas las partes corporales han mantenido o continuado, por tanto, la misma situación *relativa*, aunque su situación absoluta en el espacio pueda haber variado. Puedo suponer, por otra parte, que no sólo ha cambiado la posición de mi cuerpo, sino que su postura ya no es la misma y que, por ejemplo, mis brazos, que antes estaban doblados, están ahora estirados.

Debemos entonces distinguir los simples cambios de posición sin cambio de postura, y los cambios de postura. Ambos me aparecerían bajo la forma de sensaciones musculares. ¿Cómo es pues que los distingo? Es que el primero puede servir para corregir un cambio externo, y los otros no, o por lo menos sólo pueden dar una corrección imperfecta.

Este hecho lo explicaré como lo explicaría a alguien que posee conocimientos geométricos, pero de esto no debe concluirse que es necesario saber geometría para hacer esta distinción. Antes de saber geometría, puedo comprobar el hecho (experimentalmente, por decirlo de alguna manera), aún sin ser capaz de explicarlo. Pero simplemente para hacer la distinción entre ambos tipos de cambio, no necesito *explicar* el hecho, es suficiente con *comprobarlo*.

Sea como fuere, la explicación es sencilla. Supongamos que un objeto exterior es desplazado. Si deseamos que las distintas partes de nuestro cuerpo continúen - con respecto a este cuerpo - con su posición relativa inicial, es necesario que estas distintas partes continúen, de igual forma, con su posición relativa inicial unas con otras. Únicamente los cambios internos que satisfacen esta última condición serán capaces de corregir el cambio externo producido por el desplazamiento de tal objeto. Si, por consiguiente, ha cambiado la posición relativa de mi ojo con respecto a mi dedo, aún seré capaz de colocar nuevamente mi ojo en su situación relativa inicial con respecto al objeto y reestablecer así las sensaciones visuales primarias, pero entonces la posición relativa del dedo con respecto al objeto habrá cambiado, y las sensaciones táctiles ya no serán reestablecidas.

2. Comprobamos, de igual forma, que el mismo cambio externo puede ser corregido por dos cambios internos correspondientes a dos sensaciones musculares distintas. Aquí, de nuevo, puedo comprobar esto sin saber geometría, y no tengo necesidad de nada más. Pero procederé a dar la explicación de este hecho empleando un

lenguaje geométrico. Para ir de la posición *A* a la posición *B*, puedo tomar varias rutas. A la primera de estas rutas corresponderá una serie *S* de sensaciones musculares; a la segunda ruta corresponderá otra serie *S’’* de sensaciones musculares que, por lo general, será completamente diferente, debido a que se usarán otros músculos.

¿Cómo es que llego a considerar estas dos series *S* y *S’’* como correspondientes al mismo desplazamiento *AB*? Es porque ambas series son capaces de corregir el mismo cambio externo. Aparte de eso, no tienen nada en común.

Consideremos ahora dos cambios externos: α y β, que serán, por ejemplo, la rotación de una esfera mitad azul, mitad roja, y la rotación de una esfera mitad amarilla, mitad verde. Estos dos cambios no tienen nada en común, debido a que uno es el paso de lo azul a lo rojo, y el otro el paso de lo amarillo a lo verde. Consideremos, por otra parte, dos series de cambios internos *S* y *S’’*; como los otros, no tendrán nada en común. Y aún así digo que α y β corresponden al mismo desplazamiento, y que *S* y *S’’* corresponden también al mismo desplazamiento. ¿Por qué? Simplemente porque *S* puede corregir β así como α, y porque α puede ser corregido por *S’’* así como por *S*. Y entonces surge una cuestión por sí misma: si he comprobado que *S* corrige α y β y que *S’’* corrige α, ¿puedo asegurar que, de igual forma, *S’’* corrige β? El experimento, por sí mismo, nos puede enseñar si esta ley se cumple. Si no se cumpliese, por lo menos de manera aproximada, no habría geometría, y tampoco habría espacio, porque ya no tendríamos interés alguno en clasificar los cambios internos y externos tal como lo he hecho y tampoco, por ejemplo, en distinguir cambios de estado de cambios de posición.

Es interesante ver cuál ha sido el papel de la experiencia en todo esto. Nos ha mostrado que una cierta ley se cumple de manera aproximada. No nos ha dicho *por qué* hay espacio, y si satisface la condición en cuestión. En realidad sabía, antes de toda experiencia, que el espacio satisfacía esta condición o que no sería tal. No tengo derecho alguno para decir que la experiencia me mostró que la geometría es posible. Muy bien puedo ver que la geometría es posible, porque no implica contradicción alguna; la experiencia únicamente me dice que la geometría es útil.

6. ESPACIO VISUAL

Aunque las impresiones motoras han tenido, tal como he explicado, una influencia conjunta preponderante en la génesis de la noción del espacio, que nunca habría surgido sin ellas, sería también interesante examinar el papel de las impresiones visuales e

investigar cuántas dimensiones tiene el “espacio visual”. Y para tal propósito, debemos aplicar a estas impresiones la definición dada en la parte 3 de este capítulo.

Una primera dificultad se presenta por sí misma: consideremos una sensación de color rojo afectando un cierto punto de la retina; y, por otra parte, una sensación de color azul afectando el mismo punto de la retina. Es necesario que tengamos algún medio para reconocer que estas dos sensaciones, cualitativamente distintas, tienen algo en común. Ahora, de acuerdo con las consideraciones expuestas en el párrafo anterior, hemos sido capaces de reconocer esto únicamente por los movimientos del ojo y las observaciones a las que estas sensaciones han dado lugar. Si el ojo fuese inmóvil, o si estuviésemos inconscientes de sus movimientos, no seríamos capaces de reconocer que estas dos sensaciones, de distinta cualidad, tienen algo en común. No seríamos capaces de desenganchar de ellas lo que les da un carácter geométrico. Las sensaciones visuales, sin las sensaciones musculares, no tendrían nada geométrico, de manera que puede decirse que no hay un espacio visual puro.

Para librarnos de esta dificultad, consideremos solamente sensaciones de la misma naturaleza, sensaciones rojas por ejemplo, difiriendo una de la otra únicamente en cuanto al punto de la retina que afectan. Es claro que no tengo razón alguna para hacer tal distinción arbitraria entre todas las posibles sensaciones visuales, por el propósito de unificar, en la misma clase, todas las sensaciones del mismo color, sea cualquiera el punto de la retina afectado. Nunca habré soñado con eso, ni lo habré aprendido por los medios que hemos visto, distinguir cambios de estado de cambios de posición, es decir, si mi ojo fuese inmóvil. Dos sensaciones del mismo color afectando dos partes distintas de la retina me parecerían como cualitativamente distintas, tal como dos sensaciones de distinto color.

Al restringirme a las sensaciones rojas, impongo sobre mí una limitación artificial y descuido, sistemáticamente, toda una parte de la cuestión. Pero es únicamente por este artificio que soy capaz de analizar el espacio visual sin mezclar sensación motora alguna.

Imaginemos una línea trazada sobre la retina dividiendo en dos su superficie, y pongamos aparte las sensaciones rojas afectando un punto de esta línea, o aquellas que difieren de éstas muy poco como para ser distinguidas. El agregado de estas sensaciones formará una especie de corte que llamaremos *C*, y es claro que este corte es suficiente para dividir la variedad de posibles sensaciones rojas, y que si tomo dos sensaciones rojas afectando dos puntos situados en un lado y en otro de la línea, no puedo pasar de

una de estas sensaciones a la otra de una manera continua sin pasar, en un cierto momento, a través de una sensación que pertenece al corte.

Si, por tanto, el corte tiene *n* dimensiones, la variedad total de mis sensaciones rojas o, si se prefiere, la totalidad del espacio visual, tendrá $n+1$.

Ahora, yo distingo las sensaciones rojas afectando un punto del corte *C*. La colección de estas sensaciones formará un nuevo corte *C'*. Es evidente que esto *dividirá* al corte *C*, siempre que demos a la palabra dividir el mismo significado.

Si, por consiguiente, el corte *C'* tiene *n* dimensiones, el corte *C* tendrá $n+1$, y la totalidad del espacio visual $n+2$.

Si todas las sensaciones rojas afectando el mismo punto de la retina fuesen consideradas como idénticas, el corte *C'*, reducido a un único elemento, tendría 0 dimensiones, y el espacio visual tendría 2.

Y con todo esto, a menudo se dice que el ojo nos da la sensación de una tercera dimensión, y que nos permite, en cierta medida, reconocer la distancia de los objetos. Cuando intentamos analizar esta sensación, comprobamos que se reduce o bien al conocimiento de la convergencia de los ojos, o bien al esfuerzo de acomodamiento que realiza el músculo ciliar para enfocar la imagen.

Dos sensaciones rojas afectando el mismo punto de la retina serán, por lo tanto, consideradas como idénticas sólo si están acompañadas por la misma sensación de convergencia y también por la misma sensación de esfuerzo de acomodamiento o, por lo menos, por sensaciones de convergencia y acomodamiento tan ligeramente distintas como para ser indistinguibles.

Por esta razón, el corte *C'* es por sí mismo un continuo y el corte *C* tiene más de una dimensión.

Pero precisamente sucede que la experiencia nos enseña que cuando dos sensaciones visuales están acompañadas por la misma sensación de convergencia, están igualmente acompañadas por la misma sensación de acomodamiento. Si entonces formamos un nuevo corte *C''* con todas las sensaciones del corte *C'*, que están acompañadas por una cierta sensación de convergencia, de acuerdo con la ley precedente, serán todas indistinguibles y pueden considerarse como idénticas. Por lo tanto, *C''* no será un continuo y tendrá cero dimensiones; y como *C''* divide *C'* resulta que *C'* tiene una, *C* dos y *la totalidad del espacio visual tres dimensiones*.

¿Pero sería lo mismo si la experiencia nos hubiese enseñado lo contrario y si una cierta sensación de convergencia no estuviese siempre acompañada por la misma

sensación de acomodamiento? En este caso, dos sensaciones afectando el mismo punto de la retina y acompañadas por la misma sensación de convergencia - dos sensaciones que consecuentemente pertenecerían al corte *C’’* - podrían, no obstante, distinguirse, porque estarían acompañadas por dos sensaciones distintas de acomodamiento. Por lo tanto, *C’’* sería, a su vez, un continuo y tendría una dimensión (por lo menos); entonces *C’* tendría dos, *C* tres y *la totalidad del espacio visual tendría cuatro dimensiones*.

¿Debe decirse entonces que es la experiencia la que nos enseña que el espacio tiene tres dimensiones, porque es a partir de una ley experimental que le hemos atribuido tres? Pero lo que hemos hecho es, por decirlo de alguna manera, únicamente un experimento fisiológico; y como también sería suficiente con ponerse unos lentes para acabar con el acuerdo entre las sensaciones de convergencia y acomodamiento, ¿debemos decir que el ponernos los lentes es suficiente para hacer que el espacio tenga cuatro dimensiones, y que el óptico que construyó tales lentes ha dado una dimensión más al espacio? Evidentemente no. Todo lo que podemos decir es que la experiencia nos ha enseñado la conveniencia de atribuir tres dimensiones al espacio.

Pero el espacio visual es sólo una parte del espacio, e incluso en la noción de este espacio hay algo artificial, como expliqué al principio. El espacio real es el espacio motor, y esto es lo que examinaremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IV

EL ESPACIO Y SUS TRES DIMENSIONES

I. EL GRUPO DE DESPLAZAMIENTOS

Resumamos brevemente los resultados obtenidos. Nos propusimos investigar qué significaba decir que el espacio tiene tres dimensiones y primero nos hemos preguntado qué es un continuo físico y cuándo puede decirse que tiene *n* dimensiones. Si consideramos distintos sistemas de impresiones y los comparamos uno con otro, a menudo reconocemos que dos de estos sistemas de impresiones son indistinguibles (lo que comúnmente es expresado al decir que están demasiado cerca el uno del otro, y que nuestros sentidos son muy toscos como para distinguirlos) y además comprobamos que dos de estos sistemas pueden a veces discriminarse uno de otro aunque sean indistinguibles de un tercer sistema. En tal caso, decimos que la variedad de estos sistemas de impresiones forma un continuo físico *C*, y cada uno de estos sistemas es llamado un *elemento* del continuo *C*.

¿Cuántas dimensiones tiene este continuo? Tomemos primero dos elementos *A* y *B* de *C*, y supongamos que existe una serie Σ de elementos, todos pertenecientes al continuo *C*, de tal suerte que *A* y *B* son dos términos extremos de esta serie y que cada término de la serie es indistinguible del precedente. Si puede encontrarse tal serie Σ, decimos que *A* y *B* están unidos el uno al otro; y si cualesquiera dos elementos de *C* están unidos el uno al otro, decimos que *C* es todo de una sola pieza.

Ahora tomemos, en el continuo *C*, un cierto número de elementos de una manera totalmente arbitraria. El agregado de estos elementos se llamará *corte*. Entre las varias series Σ que unen *A* con *B*, debemos distinguir aquellas en donde un elemento es indistinguible de uno de los elementos del corte (decimos que estas son las que *cortan* el corte) y aquellas en donde *todos* los elementos son distinguibles de todos aquellos del corte. Si *todas* las series Σ que unen *A* con *B* cortan el corte, decimos que *A* y *B* están separadas por el corte, y que el corte *divide C*. Si en *C* no podemos encontrar dos elementos separados por el corte, decimos que el corte *no divide C*.

Establecida esta definición, si el continuo *C* puede dividirse en cortes que por sí mismos no forman un continuo, este continuo *C* tiene sólo una dimensión; en el caso

contrario, tiene varias. Si un corte formando un continuo de 1 dimensión es suficiente para dividir *C*, *C* tendrá 2 dimensiones; si es suficiente un corte formando 2 dimensiones, *C* tendrá 3 dimensiones, etc. Gracias a estas definiciones, siempre podemos reconocer cuántas dimensiones tiene cualquier continuo físico. Únicamente queda encontrar un continuo físico que sea, por decirlo así, equivalente al espacio, de tal forma que a cada punto del espacio corresponda un elemento de este continuo, y que a puntos del espacio muy cercanos unos con otros correspondan elementos indistinguibles. El espacio tendrá, pues, tantas dimensiones como este continuo.

La intermediación de este continuo físico, capaz de representación, es indispensable porque no podemos representarnos al espacio, y esto por una multitud de razones. El espacio es un continuo matemático, es infinito, y sólo podemos representarnos continuos físicos y objetos finitos. Los diferentes elementos del espacio, que llamamos puntos, son todos parecidos, y para aplicar nuestra definición es necesario que sepamos cómo distinguir los elementos uno de otro, por lo menos si no están demasiado juntos. Finalmente, el espacio absoluto es un sinsentido, y es necesario que, al referirnos al espacio, nos refiramos a un sistema de ejes invariablemente ligados a nuestro cuerpo (que siempre debemos suponer como puesto en la postura inicial).

Después hemos buscado formar, con nuestras sensaciones visuales, un continuo físico equivalente al espacio. Esto ciertamente es fácil y este ejemplo es particularmente apropiado para la discusión del número de dimensiones. Así, esta discusión nos ha permitido ver en qué medida es admisible decir que el "espacio visual" tiene tres dimensiones. Solamente que esta solución es incompleta y artificial. Ya he explicado por qué, y no es al espacio visual, sino al espacio motor donde debemos llevar nuestros esfuerzos. Después hemos recordado cuál es el origen de la distinción que hacemos entre cambios de posición y cambios de estado. Entre los cambios que ocurren en nuestras impresiones, distinguimos, primero, los cambios *internos*, voluntarios y acompañados por sensaciones musculares, y los cambios *externos*, con las características opuestas. Comprobamos que puede darse el caso en donde un cambio externo pueda *ser corregido* por un cambio interno que reestablece las sensaciones originales. Los cambios externos capaces de ser corregidos por un cambio interno son llamados *cambios de posición*, y aquellos que no son capaces son llamados *cambios de estado*. Los cambios internos capaces de corregir un cambio externo son llamados *desplazamientos de todo el cuerpo*, y aquellos que no son llamados *cambios de postura*.

Ahora sean α y β dos cambios externos, y α' y β' dos cambios internos. Supongamos que α puede ser corregido ya sea por α' o por β', y que α' puede corregir ya sea α o β. La experiencia nos dice entonces que β' puede igualmente corregir β. En este caso, decimos que α y β corresponden al *mismo* desplazamiento y también que α' y β' corresponden al *mismo* desplazamiento. Postulado lo anterior, podemos imaginar un continuo físico que llamaremos *el continuo o grupo de desplazamientos* y que definiremos de la siguiente manera. Los elementos de este continuo serán los cambios internos capaces de corregir un cambio externo. Dos de estos cambios internos α' y β' deben considerarse como indistinguibles si: (1) si así son naturalmente, es decir, si están demasiado juntos uno con otro; (2) si α' es capaz de corregir el mismo cambio externo que un tercer cambio interno naturalmente indistinguible de β'. En este segundo caso serán, por así decirlo, indistinguibles por convención, esto es, al acordar desatender circunstancias que puedan hacerlos distinguibles.

Nuestro continuo ya está totalmente definido, debido a que conocemos sus elementos y hemos establecido bajo qué condiciones pueden considerarse como indistinguibles. Tenemos así todo lo necesario para aplicar nuestra definición y determinar cuántas dimensiones tiene este continuo. Debemos reconocer que tiene *seis*. El continuo de desplazamientos no es, por tanto, equivalente al espacio, ya que el número de dimensiones no es el mismo; únicamente está relacionado con el espacio. Ahora bien, ¿cómo es que sabemos que este continuo de desplazamientos tiene seis dimensiones? Lo sabemos *por experiencia*.

Sería fácil describir los experimentos por los cuales pudimos llegar a este resultado. Se vería que en este continuo pueden hacerse cortes que lo dividan y que, a su vez, son un continuo; que estos cortes, asimismo, pueden dividirse por otros cortes de segundo orden que aún son, a su vez, un continuo, y que esto termina sólo después de cortes del sexto orden que ya no serían, a su vez, un continuo. Para nuestras definiciones, lo anterior significa que el grupo de desplazamientos tiene seis dimensiones.

Tal descripción sería fácil, como ya dije, pero sería más bien larga. Además, ¿no sería un tanto artificial? Este grupo de desplazamientos, hemos visto, está relacionado con el espacio, y el espacio podría deducirse de él, pero no es equivalente al espacio, porque no tiene el mismo número de dimensiones. Y cuando hayamos demostrado cómo puede formarse la noción de este continuo y cómo puede deducirse de él la noción del espacio, siempre puede preguntarse por qué el espacio de tres dimensiones nos es

mucho más familiar que este continuo de seis dimensiones, y consecuentemente dudar si fue por este desvío que se formó la noción del espacio en la mente humana.

II. IDENTIDAD DE DOS PUNTOS

¿Qué es un punto? ¿Cómo sabemos si dos puntos del espacio son idénticos o distintos? O, en otras palabras, cuando decimos: el objeto *A* ocupó, en el instante α, el punto que el objeto *B* ocupa en el instante β, ¿qué queremos realmente decir?

Tal es el problema que nos propusimos en el capítulo precedente (4). Como he explicado, no es una cuestión de comparar las posiciones de los objetos *A* y *B* en el espacio absoluto, porque tal cuestión carecería de sentido alguno. Es, más bien, cuestión de comparar las posiciones de estos dos objetos con respecto a ejes invariablemente ligados con mi cuerpo, suponiendo siempre este cuerpo repuesto en la misma postura.

Supongo que, entre los instantes α y β, no he movido mi cuerpo ni mi ojo, y lo sé por mi sensación muscular. Ni he movido mi cabeza, mi brazo o mi mano. Puedo comprobar que, en el instante α, las impresiones que atribuí al objeto *A* me fueron transmitidas, algunas transmitidas por una de las fibras de mi nervio óptico, las otras por uno de los nervios táctiles sensitivos de mi dedo. Puedo también comprobar que, en el instante β, otras impresiones que atribuí al objeto *B* me son transmitidas, algunas por esta misma fibra del nervio óptico, las otras por este mismo nervio táctil.

Aquí debo hacer una pausa para dar una explicación. ¿Cómo sé que esta impresión que atribuyo a *A*, y aquella que atribuyo a *B* - impresiones cualitativamente distintas - me son transmitidas por el mismo nervio? Para tomar el ejemplo de las sensaciones visuales, si *A* produce dos sensaciones simultáneas, una sensación puramente luminosa *a* y una sensación colora *a*’, y *B* produce, igualmente de manera simultánea, una sensación luminosa *b* y una sensación colora *b*’, ¿debemos suponer que, si estas distintas sensaciones me son transmitidas por la misma fibra retinal, *a* es idéntica a *b*, pero que, en general, las sensaciones coloras *a*’ y *b*’, producidas por cuerpos diferentes, son distintas? En tal caso, sería la identidad de la sensación *a* que acompaña *a*’ con la sensación *b* que acompaña *b*’ lo que me diría que todas estas sensaciones me son transmitidas por la misma fibra.

Sea como fuere con esta hipótesis y aunque me inclino a preferirla sobre otras considerablemente más complicadas, es cierto que, de alguna manera, hay algo en

común entre las sensaciones $a+a'$ y $b+b'$, sin lo cual no tendríamos medio alguno para reconocer que el objeto *B* ha tomado el lugar del objeto *A*.

Por lo tanto, ya no insistiré más y recordaré la hipótesis que acabo de hacer: Supongo haber comprobado que las impresiones que atribuyo a *B* me son transmitidas en el instante β por las mismas fibras, tanto ópticas como táctiles, que, en el instante α, me transmitieron las impresiones que atribuí a *A*. Si esto es así, no debemos dudar en declarar que el punto ocupado por *B* en el instante β es idéntico al punto ocupado por *A* en el instante α.

He enunciado dos condiciones para que estos puntos sean idénticos; una es relativa a la vista, la otra al tacto. Considerémoslas por separado. La primera es necesaria, pero no suficiente. La segunda es, de una vez, necesaria y suficiente. Una persona con conocimientos geométricos podría fácilmente explicar esto de la siguiente manera: Sea *O* el punto de la retina donde se forma, en el instante α, la imagen del cuerpo *A*; sea *M* el punto del espacio ocupado, en el instante α, por este cuerpo *A*; sea *M'* el punto del espacio ocupado, en el instante β, por el cuerpo *B*. Para que este cuerpo *B* forme su imagen en *O*, no es necesario que los puntos *M* y *M'* coincidan, debido a que la visión actúa a cierta distancia, y es suficiente que los tres puntos *O M M'* estén en una línea recta. Esta condición (que los dos objetos formen su imagen en *O*) es, por lo tanto, necesaria, pero no suficiente para que los puntos *M* y *M'* coincidan. Sea ahora *P* el punto ocupado por mi dedo y el punto en donde se mantiene, porque no se mueve. Como el tacto no actúa a distancia, si el cuerpo *A* toca mi dedo en el instante α, es porque *M* y *P* coinciden; si *B* toca mi dedo en el instante β, es porque *M'* y *P* coinciden. Por consiguiente, *M* y *M'* coinciden. Así, la condición de que *A* toque mi dedo en el instante α, y *B* lo toque en el instante β es, de una vez, necesaria y suficiente para que *M* y *M'* coincidan.

Pero nosotros, que aún no sabemos geometría, no podemos razonar así. Todo lo que podemos hacer es comprobar, experimentalmente, que la primera condición relativa a la vista puede cumplirse sin la segunda, que es relativa al tacto, pero que la segunda no puede cumplirse sin la primera.

Supongamos que la experiencia nos ha enseñado lo contrario, como bien podría ser, dado que esta hipótesis no contiene nada absurdo. Supongamos, entonces, que hemos comprobado, experimentalmente, que la condición relativa al tacto puede cumplirse sin que se cumpla la de la vista y que, por el contrario, aquella de la vista no puede cumplirse sin que se cumpla también la del tacto. Es claro que, si esto es así,

debemos concluir que es el tacto el que puede ejercerse a una cierta distancia, y que la vista no opera a una cierta distancia.

Pero esto no es todo. Hasta aquí, hemos supuesto que para determinar el lugar de un objeto, únicamente he hecho uso de mi ojo y de un solo dedo; pero pude haber empleado, igual de bien, otros medios, por ejemplo, todos mis dedos.

Supongo que mi primer dedo recibe, en el instante α, una impresión táctil que atribuyo al objeto *A*. Realizo una serie de movimientos, correspondientes a una serie *S* de sensaciones musculares. Después de estos movimientos, en el instante α', mi *segundo* dedo recibe una impresión táctil que atribuyo igualmente a *A*. Más tarde, en el instante β, sin que me haya movido, tal como mi sentido muscular me lo dice, este mismo segundo dedo me transmite de nuevo una impresión táctil que esta vez atribuyo al objeto *B*. Después realizo una serie de movimientos, correspondientes a una serie *S'* de sensaciones musculares. Sé que esta serie *S'* es la inversa de la serie *S* y corresponde a movimientos contrarios. Sé esto porque muchas experiencias previas me han mostrado que si sucesivamente realizo las dos series de movimientos correspondientes a *S* y a *S'*, las impresiones originales se reestablecen; en otras palabras, que las dos series se compensan mutuamente. Establecido lo anterior, ¿debo esperar que, en el instante β', cuando ha terminado la segunda serie de movimientos, *mi primer dedo* sienta una impresión táctil atribuible al objeto *B*?

Para responder esta cuestión, aquellos con conocimientos geométricos razonarían como sigue: existe la posibilidad de que el objeto *A* no se haya movido entre los instantes α y α', ni el objeto *B* entre los instantes β y β'; asumamos esto. En el instante α, el objeto *A* ocupó un cierto punto *M* del espacio. Ahora, en este instante, tocó mi dedo, y *como el tacto no opera a una cierta distancia*, mi primer dedo estaba, igualmente, en el punto *M*. Después realicé la serie *S* de movimientos y, al final de esta serie, esto es, en el instante α', comprobé que el objeto *A* tocó mi segundo dedo. Por tanto concluí que este segundo dedo estaba entonces en *M*, es decir, que los movimientos *S* tuvieron el resultado de llevar al segundo dedo al lugar del primero. En el instante β, el objeto *B* ha entrado en contacto con mi segundo dedo: como no me he movido, este segundo dedo ha permanecido en *M*; por lo tanto, el objeto *B* ha llegado a *M*; por hipótesis, no se ha movido hasta el instante β'. Pero entre los instantes β y β' he realizado los movimientos *S'*; dado que estos movimientos son lo inverso de los movimientos *S*, tuvieron que haber tenido, como efecto, el traer el primer dedo al lugar del segundo. En el instante β' este primer dedo estará, por tanto, en *M*; y como el objeto

B está igualmente en *M*, este objeto *B* tocará mi primer dedo. A la cuestión propuesta, la respuesta será, por tanto, sí.

Nosotros, que aún no sabemos geometría, no podemos razonar así; pero comprobamos que esta anticipación se hace ordinariamente, y siempre podemos explicar las excepciones al decir que el objeto *A* se ha movido entre los instantes α y α', o el objeto *B* entre los instantes β y β'.

¿Pero pudo haber dado la experiencia un resultado contrario? ¿Sería este resultado contrario absurdo por sí mismo? Evidentemente no. ¿Qué debimos haber hecho, entonces, si la experiencia hubiese dado este resultado contrario? ¿Se volvería, de esta forma, imposible toda geometría? En absoluto. Nos hubiésemos contentado con concluir que *el tacto puede operar a distancia*.

Cuando digo que el tacto no opera a distancia, pero sí la vista, tal aserción solamente tiene un sentido, que es como sigue: para reconocer si *B* ocupa en el instante β el punto ocupado por *A* en el instante α, puedo utilizar una multitud de criterios distintos. En uno interviene mi ojo, en otro mi primer dedo, en otro más mi segundo dedo, etc. Pues bien, es suficiente con que el criterio relativo a uno de mis dedos esté satisfecho para que todos los otros estén satisfechos, pero no es suficiente con que el criterio relativo al ojo lo esté. Tal es el sentido de mi aserción, y me contento con afirmar un hecho experimental ordinariamente verificado.

Al final del capítulo precedente analizamos el espacio visual. Vimos que, para engendrarlo, es necesario introducir las sensaciones retinales: aquella de la convergencia y aquella del acomodamiento, y que si éstas no estuviesen siempre en concordancia, el espacio visual tendría cuatro dimensiones en lugar de tres. También vimos que si sólo introdujésemos las sensaciones retinales, obtendríamos un "espacio visual simple" de sólo dos dimensiones. Por otra parte, consideremos al espacio táctil, limitándonos a las sensaciones de un sólo dedo que es, en suma, la colección de posiciones que puede ocupar este dedo. Este espacio táctil, que analizaremos en la siguiente sección y consecuentemente pido no considerarlo más por el momento, este espacio táctil, como decía, tiene tres dimensiones. ¿Por qué el espacio, propiamente dicho, tiene tantas dimensiones como el espacio táctil y más que el simple espacio visual? Es porque el tacto no opera a distancia, mientras que la visión sí lo hace. Estas dos aserciones tienen el mismo significado y ya hemos visto cuál es.

Ahora regreso a un punto por el que pasé rápidamente para no interrumpir la discusión. ¿Cómo sabemos que las impresiones hechas sobre nuestra retina por *A* en el

instante α y por *B* en el instante β son transmitidas por la misma fibra retinal, aunque tales impresiones sean cualitativamente distintas? He sugerido una hipótesis sencilla, y añadí que otras hipótesis, decididamente más complejas, me parecen más probablemente ciertas. Aquí están entonces estas hipótesis, sobre las que ya he dicho algunas palabras. ¿Cómo sabemos que las impresiones producidas por el objeto rojo *A* en el instante α, y por el objeto azul *B* en el instante β, si estos dos objetos han sido impresos sobre el mismo punto de la retina, tienen algo en común? La sencilla hipótesis hecha antes puede rechazarse y podemos suponer que estas dos impresiones, cualitativamente distintas, son transmitidas por dos fibras nerviosas distintas aunque contiguas. ¿Entonces qué medios tenemos para saber que estas fibras son contiguas? Si el ojo fuese inmóvil, es probable que no tengamos medio alguno. Pero son precisamente los movimientos del ojo los que nos han hecho saber que existe la misma relación entre la sensación de azul en el punto *A* y la sensación de azul en el punto *B* de la retina que entre la sensación de rojo en el punto *A* y la sensación de rojo en el punto *B*. Nos han hecho saber, en realidad, que los mismos movimientos, correspondientes a las mismas sensaciones musculares, nos llevan de la primera a la segunda, o de la tercera a la cuarta. No haré hincapié en estas consideraciones que pertenecen, como se ve, a la cuestión de los signos locales puesta en relieve por Lotze.

III. ESPACIO TÁCTIL

Así, sabemos cómo reconocer la identidad de dos puntos, el punto ocupado por *A* en el instante α y el punto ocupado por *B* en el instante β, solamente *bajo una condición*, a saber, que no nos hemos movido entre los instantes α y β. Lo anterior no es suficiente para nuestro objeto. Supongamos, entonces, que me he movido de cualquier manera en el intervalo entre estos dos instantes. ¿Cómo sabré si el punto ocupado por *A* en el instante α es idéntico al punto ocupado por *B* en el instante β? Supongo que, en el instante α, el objeto *A* estaba en contacto con mi primer dedo y que, de la misma forma, en el instante β, el objeto *B* toca este primer dedo; pero, al mismo tiempo, mi sentido muscular me ha dicho que, en el intervalo, mi cuerpo se ha movido. He considerado antes dos series de sensaciones musculares *S* y *S'*, y he dicho que a menudo ocurre que concluimos que tales dos series *S* y *S'* son inversas una con la otra, porque hemos observado que cuando estas dos series se suceden una a la otra, se reestablecen nuestras impresiones originales.

Si entonces mi sentido muscular me dice que me he movido entre los dos instantes α y β, pero de tal forma que siento sucesivamente las dos series de sensaciones musculares *S* y *S'* que considero inversas, debo concluir, tal como si no me hubiese movido, que los puntos ocupados por *A* en el instante α y por *B* en el instante β son idénticos si compruebo que mi primer dedo toca *A* en el instante α y *B* en el instante β.

Esta solución, como se verá, aún no es completamente satisfactoria. Veamos, en realidad, cuántas dimensiones nos obligaría a atribuir al espacio. Deseamos comparar los dos puntos ocupados por *A* y por *B* en los instantes α y β, o (lo que viene a ser lo mismo, debido a que supongo que mi dedo toca *A* en el instante α y *B* en el instante β) deseamos comparar los dos puntos ocupados por mi dedo en los dos instantes α y β. El único medio que uso para esta comparación es la serie Σ de sensaciones musculares que han acompañado los movimientos de mi cuerpo entre estos dos instantes. Las distintas series Σ imaginables forman, evidentemente, un continuo físico cuyo número de dimensiones es muy grande. Acordemos, tal como lo he hecho, en no considerar como distintas las dos series Σ y Σ + *S* + *S'*, cuando *S* y *S'* sean inversas una de la otra en el sentido dado arriba a esta palabra. A pesar de este argumento, el agregado de distintas series Σ todavía formará un continuo físico y el número de dimensiones será menor pero aún muy grande.

A cada una de estas series Σ corresponde un punto en el espacio; a dos series Σ y Σ' corresponden, pues, dos puntos *M* y *M'*. Los medios que hasta ahora hemos usado nos permiten reconocer que *M* y *M'* no son distintas en dos casos: (1) si Σ es idéntica a Σ'; (2) si Σ' = Σ + *S* + *S'*, *S* y *S'* siendo inversas una de la otra. Si en todos los demás casos consideramos a *M* y *M'* como distintas, la variedad de puntos tendría tantas dimensiones como el agregado de distintas series Σ, esto es, mucho más de tres.

Para aquellos familiarizados con la geometría, la siguiente explicación será fácilmente comprensible. Entre las series imaginables de sensaciones musculares, están aquellas que corresponden a series de movimientos en donde el dedo no se mueve. Digo que si uno no considera como distintas las series Σ y Σ' + σ, donde la serie σ corresponde a movimientos en donde el dedo no se mueve, el agregado de series constituirá un continuo de tres dimensiones, pero si uno considera como distintas las dos series Σ y Σ' (a menos que Σ' = Σ + *S* + *S'*, siendo *S* y *S'* inversas), el agregado de series constituirá un continuo de más de tres dimensiones.

En efecto, haya en el espacio una superficie *A*, en esta superficie una línea *B*, y en esta línea un punto *M*. Sea C_0 el agregado de todas las series Σ. Sea C_1 el agregado de todas las series Σ, tal que al final de los movimientos correspondientes, el dedo se encuentre sobre la superficie *A*, y C_2 o C_3 el agregado de series Σ tal que al final el dedo se encuentre sobre *B*, o en *M*. Es claro, primero, que C_1 constituirá un corte que dividirá a C_0, que C_2 será un corte que dividirá a C_1, y C_3 un corte que dividirá a C_2. Por tanto resulta que, de acuerdo con nuestras definiciones, si C_3 es un continuo de *n* dimensiones, C_0 será un continuo físico de $n+3$ dimensiones.

Por lo tanto, sean Σ y Σ' = Σ + σ dos series formando parte de C_3; para ambas, al final de los movimientos, el dedo se encuentra en *M*; entonces resulta que, al principio y al final de la serie σ, el dedo se encuentra en el mismo punto *M*. Esta serie σ es, por consiguiente, una de aquellas que corresponde a movimientos en donde el dedo no se mueve. Si Σ y Σ + σ no son consideradas como distintas, todas las series de C_3 se mezclan en una sola; entonces C_3 tendrá 0 dimensiones, y C_0 tendrá 3, tal como quise probar. Si, por el contrario, no consideramos a Σ y Σ + σ como una mezcla (a menos que σ = *S* y *S'*, siendo *S* y *S'* inversas), es claro que C_3 contendrá un gran número de series de distintas sensaciones; y esto porque, sin que el dedo se mueva, el cuerpo pudo tomar una multitud de distintas posturas. Entonces C_3 formará un continuo y C_0 tendrá más de tres dimensiones, y esto también lo quise probar.

Nosotros, que aún no sabemos geometría, no podemos razonar de esta forma; únicamente podemos verificar. Pero entonces surge una cuestión: ¿cómo es que, antes de saber geometría, llegamos a distinguir, de otras series, estas series σ en donde el dedo no se mueve? Es, en realidad, solamente después de haber hecho esta distinción que pudimos haber llegado a considerar a Σ y Σ + σ como idénticas, y es únicamente bajo esta condición, como hemos visto, que podemos llegar a un espacio de tres dimensiones.

Llegamos a distinguir la serie σ porque a menudo sucede que, cuando hemos ejecutado los movimientos que corresponden a esta serie σ de sensaciones musculares, las sensaciones táctiles que nos son transmitidas por el nervio del dedo que hemos llamado primer dedo, persisten y no se ven alteradas por estos movimientos. La experiencia por sí misma así nos lo dice, y solamente ella puede decírnoslo.

Si hemos distinguido la serie de sensaciones musculares $S + S'$, formada por la unión de dos series inversas, es porque preservan la totalidad de nuestras impresiones; si ahora distinguimos las series σ es porque preservan *ciertas* de nuestras impresiones. (Cuando digo que una serie de sensaciones musculares *S* "preserva" una de nuestras impresiones *A*, me refiero a que comprobamos que, si sentimos la impresión *A*, y después las sensaciones musculares *S*, *aún* sentimos la impresión *A después* de estas sensaciones *S*).

He dicho antes que a menudo sucede que las series σ no alteran las impresiones táctiles sentidas por nuestro primer dedo; dije *a menudo*, no *siempre*. Esto es lo que expresamos en nuestro lenguaje ordinario al decir que las impresiones táctiles no se alterarán si el dedo no se ha movido, *bajo la condición de que tampoco lo haya hecho el objeto A* que estaba en contacto con este dedo. Antes de saber geometría, no pudimos haber dado esta explicación; todo lo que pudimos hacer es comprobar que las impresiones a menudo persisten, pero no siempre.

Pero el que la impresión siempre continúe es suficiente para que las series σ nos parezcan notables, para que pongamos en la misma clase a las series Σ y $\Sigma + \sigma$, y, por consiguiente, para no considerarlas como distintas. Bajo estas condiciones, hemos visto que engendrarán un continuo físico de tres dimensiones.

He aquí, pues, un espacio de tres dimensiones engendrado por mi primer dedo. Cada uno de mis dedos creará uno así. Queda por considerar cómo es que llegamos a considerar a estos espacios como idénticos al espacio visual, como idénticos al espacio geométrico.

Una reflexión más antes de seguir. De acuerdo con lo anterior, conocemos los puntos del espacio o, más en general, la situación final de nuestro cuerpo únicamente por las series de sensaciones musculares que nos revelan los movimientos que nos han llevado de una cierta situación inicial a esta situación final. Pero es claro que esta situación final dependerá, por una parte, de estos movimientos y, por otra, *de la situación inicial* de la que partimos. Ahora bien, estos movimientos nos son revelados por nuestras sensaciones musculares, pero nada nos dice algo acerca de esta situación inicial, nada nos hace distinguirla de otras posibles situaciones. Esto pone bien en evidencia la relatividad esencial del espacio.

IV. IDENTIDAD DE LOS DISTINTOS ESPACIOS

Nos vemos, por tanto, llevados a comparar los dos continuos *C* y *C'* engendrados, por ejemplo, uno por mi primer dedo *D*, y el otro por mi segundo dedo *D'*. Ambos continuos físicos tienen tres dimensiones. A cada elemento del continuo *C* o, si se prefiere, a cada punto del primer espacio táctil corresponde una serie de sensaciones musculares Σ, que me llevan de una cierta situación inicial a una cierta situación final.[†††] Es más, el mismo punto de este primer espacio corresponderá a Σ y a Σ + σ, si σ es una serie de la que sabemos que no hace que el dedo *D* se mueva.

Similarmente, a cada elemento del continuo *C'*, o a cada punto del segundo espacio táctil, corresponde una serie de sensaciones Σ', y el mismo punto corresponderá a Σ' y a Σ' + σ', si σ' es una serie que no hace que el dedo *D'* se mueva.

Lo que nos permite distinguir las diversas series designadas como σ de aquellas llamadas σ' es que las primeras no alteran las impresiones táctiles sentidas por el dedo *D*, y las segundas preservan aquellas que el dedo *D'* siente.

Ahora veamos lo que hemos comprobado: al principio, mi dedo *D'* siente una sensación *A'*, y realizo movimientos que producen sensaciones musculares *S*; mi dedo *D* siente la impresión *A*, y realizo movimientos que producen una serie de sensaciones σ, y mi dedo *D* continúa sintiendo la impresión *A*, debido a que esta es la propiedad característica de la serie σ. Después hago movimientos que producen la serie *S'* de sensaciones musculares, *inversa* a *S* en el sentido dado antes a esta palabra. Compruebo, entonces, que mi dedo *D'* siente nuevamente la impresión *A'*. (Se da por supuesto que *S* ha sido escogido adecuadamente).

Esto significa que la serie *S* + σ + *S'*, preservando las impresiones táctiles del dedo *D'*, es una de las series que he llamado σ'. Inversamente, si uno considera cualquier serie *S'* + σ' + *S*, será una de las series que he llamado σ.

Así, si *S* es escogido adecuadamente, *S* + σ + *S'* será una serie σ', y al hacer que σ varíe en todas las formas posibles, obtendremos todas las posibles series σ'.

Todavía sin saber geometría, nos limitamos a verificar todo lo anterior, pero aquí está cómo aquellos que saben geometría explicarían tal hecho. Al principio, mi dedo *D'* se encuentra en el punto *M* en contacto con el objeto *a*, que lo hace sentir la impresión

[†††] En lugar de decir que referimos el espacio a ejes rígidamente ligados a nuestro cuerpo, quizá sería mejor decir, en conformidad con lo precedente, que referimos el espacio a ejes rígidamente ligados a la situación inicial de nuestro cuerpo.

A’. Hago los movimientos correspondientes a la serie *S*; he dicho que esta serie debe ser escogida adecuadamente, y hago esta elección de tal forma que estos movimientos lleven al dedo *D* al punto originalmente ocupado por el dedo *D’*, esto es, al punto *M*; este dedo *D* estará, pues, en contacto con el objeto *a*, que lo hará sentir la impresión *A*.

Después hago los movimientos correspondientes a la serie σ; en estos movimientos, por hipótesis, la posición del dedo *D* no cambia; este dedo, por lo tanto, permanece en contacto con el objeto *a* y continúa sintiendo la impresión *A*. Finalmente, realizo los movimientos correspondientes a la serie *S’*. Como *S’* es inversa a *S*, estos movimientos llevarán al dedo *D’* al punto previamente ocupado por el dedo *D*, es decir, al punto *M*. Si, como puede suponerse, el objeto *a* no se ha movido, este dedo *D’* estará en contacto con este objeto y sentirá nuevamente la impresión *A’*. Q. E. D.

Veamos las consecuencias de esto. Consideremos una serie de sensaciones musculares Σ. A esta serie corresponderá un punto *M* del primer espacio táctil. Ahora tomemos de nuevo las dos series *S* y *S’*, inversas una de la otra, y de las que ya hemos hablado. A la serie $S + \Sigma + S'$ corresponderá un punto *N* del segundo espacio táctil, ya que a cualquier serie de sensaciones musculares corresponde, como hemos dicho, un punto, ya sea en el primer espacio o en el segundo.

Consideraré a los dos puntos *N* y *M*, así definidos, como correspondientes. ¿Qué me autoriza a hacerlo? Para que esta correspondencia sea admisible, es necesario que si los dos puntos *M* y *M’*, correspondientes en el primer espacio a dos series Σ y Σ’, son idénticos, también lo sean los dos puntos correspondientes al segundo espacio *N* y *N’*, esto es, los dos puntos que corresponden a las dos series $S + \Sigma + S'$ y $S + \Sigma' + S'$. Ahora veremos que esta condición está satisfecha.

Pero antes, una observación. Como *S* y *S’* son inversas una de la otra, tendremos que $S + S' = 0$ y, consecuentemente, que $S + S' + \Sigma = \Sigma + S + S' = \Sigma$, o que $\Sigma + S + S' + \Sigma' = \Sigma + \Sigma'$. Pero de esto no se sigue que $S + \Sigma + S' = \Sigma$, porque, aunque hemos usado el signo de adición para representar la sucesión de nuestras sensaciones, es claro que el orden de esta sucesión no es indiferente y no podemos, por consiguiente, como en la adición (suma) ordinaria, invertir el orden de los términos; para decirlo en pocas palabras, nuestras operaciones son asociativas, pero no conmutativas.

Dicho lo anterior, para que Σ y Σ’ correspondan al mismo punto $M = M'$ del primer espacio, es necesario y suficiente para nosotros con que tengamos que $\Sigma' = \Sigma + \sigma$. Tendremos entonces que $S + \Sigma' + S' = S + \Sigma + \sigma + S' = S + \Sigma + S' + S + \sigma + S'$.

Pero recién hemos comprobado que $S + \sigma + S'$ era una de las series σ'. Tendremos entonces que $S + \Sigma' + S' = S + \Sigma + S' + \sigma$, lo que significa que las series $S + \Sigma' + S'$ y $S + \Sigma + S'$ corresponden al mismo punto $N = N'$ del segundo espacio. Q. E. D.

Nuestros dos espacios corresponden, por tanto, punto por punto, y pueden ser "transformados" uno en el otro: son isomorfos. ¿Cómo entonces es que llegamos a concluir que son idénticos?

Consideremos las dos series σ y $S + \sigma + S' = \sigma'$. He dicho que a menudo, pero no siempre, la serie σ preserva la impresión táctil *A* sentida por el dedo *D*. Similarmente, a menudo sucede, pero no siempre, que la serie σ' preserva la impresión táctil *A'* sentida por el dedo *D'*. Ahora compruebo que sucede *muy a menudo* (esto es, mucho más seguido de lo que antes he llamado "seguido") que, cuando la serie σ ha preservado la impresión *A* del dedo *D*, la serie σ' preserva, al mismo tiempo, la impresión *A'* del dedo *D'*; e, inversamente, que si la primera impresión es alterada, la segunda también lo será. Lo anterior sucede *muy a menudo*, pero no siempre.

Interpretamos este hecho experimental al decir que el objeto desconocido *a*, que da la impresión *A* al dedo *D*, es idéntico al objeto desconocido *a'* que da la impresión *A'* al dedo *D'*. Y, en realidad, cuando el primer objeto se mueve, lo que nos es dicho por la desaparición de la impresión *A*, el segundo igualmente se mueve, debido a que la impresión *A'* también desaparece. Cuando el primer objeto permanece inmóvil, el segundo permanece inmóvil. Si estos dos objetos son idénticos, como el primero está en el punto *M* del primer espacio y el segundo en el punto *N* del segundo espacio, estos dos puntos son idénticos. Así es como llegamos a considerar estos dos espacios como idénticos o, mejor dicho, a esto nos referimos cuando decimos que son idénticos.

Lo que acabamos de decir sobre la identidad de dos espacios táctiles hace innecesario discutir la cuestión de la identidad del espacio táctil y del espacio visual, ya que podríamos tratar a este último de la misma forma.

V. ESPACIO Y EMPIRISMO

Parece que estoy a punto de llegar a conclusiones en conformidad con ideas empíricas. En realidad, he buscado poner en evidencia el papel de la experiencia y analizar los hechos experimentales que intervienen en la génesis del espacio tridimensional. Pero sea cual sea la importancia de estos hechos, hay una cosa que no debemos olvidar y a la que además ya me he referido. Estos hechos experimentales se comprueban a menudo,

pero no siempre. Lo anterior claramente no significa que el espacio tiene a menudo tres dimensiones pero no siempre.

Sé bien que es fácil salvarse a sí mismo y decir que, si los hechos no se comprueban, es porque los objetos exteriores se han movido. Si la experiencia tiene éxito, decimos que nos enseña sobre el espacio; si no tiene éxito, nos referimos a los objetos exteriores a los que acusamos de haberse movido; en otras palabras, si no tiene éxito, se da un estímulo.

Estos estímulos son legítimos y no me niego a admitirlos, pero resultan suficientes para decirnos que las propiedades del espacio no son verdades experimentales, propiamente dichas. Si hubiésemos deseado verificar otras leyes, igualmente hubiésemos tenido éxito al dar otros estímulos análogos. ¿No debimos siempre haber sido capaces de justificar estos estímulos por las mismas razones? Alguien podría, como mucho, habernos dicho: “Tus estímulos son sin duda legítimos, pero abusas de ellos; ¿por qué mover tan seguido los objetos externos?”

Para resumir, podríamos decir que la experiencia no prueba que el espacio tenga tres dimensiones, únicamente nos prueba que es conveniente atribuirle tres dimensiones, porque de esta forma el número de estímulos se reduce a un mínimo.

Añadiré que la experiencia nos pone en contacto solamente con el espacio representativo, que es un continuo físico, y nunca con el espacio geométrico, que es un continuo matemático. A lo sumo parece decirnos que es conveniente dar al espacio geométrico tres dimensiones, para que así tenga tantas como el espacio representativo.

La cuestión empírica puede plantearse de otra forma. ¿Es imposible concebir los fenómenos físicos, los fenómenos mecánicos por ejemplo, de otra forma que no sea en un espacio tridimensional? Tendríamos entonces una prueba experimental objetiva, independiente, por así decirlo, de nuestra fisiología, de nuestros modos de representación.

Pero no sucede así. No discutiré aquí toda la cuestión, me limitaré a recordar el notable ejemplo proporcionado por la mecánica de Hertz. Se sabe que este gran físico no creía en la existencia de fuerzas, propiamente dichas. Suponía, más bien, que los puntos materiales visibles estaban sujetos a ciertas ligaduras invisibles que unían tales puntos con otros igualmente invisibles y tal es el efecto de estas ligaduras invisibles que atribuimos a las fuerzas.

Pero lo anterior es sólo una parte de sus ideas. Supongamos un sistema formado por n puntos materiales, visibles o no, que diese, en total, $3n$ coordenadas.

Considerémoslas como las coordenadas de un *único* punto en un espacio de 3*n* dimensiones. Este único punto estaría constreñido para permanecer sobre una superficie (de cualquier número de dimensiones < 3*n*) en virtud de las ligaduras sobre las que ya hemos hablado. Para ir en esta superficie de un punto a otro, siempre se tomaría el camino más corto; tal sería el único principio que resumiría toda la mecánica.

Sea lo que sea que se piense de esta hipótesis, ya sea que nos seduzca su simplicidad, o que nos repugne su carácter artificial, el simple hecho de que Hertz haya sido capaz de concebirla, y de considerarla más conveniente que nuestras hipótesis habituales, es suficiente para probar que nuestras ideas ordinarias y, en particular, aquellas sobre las tres dimensiones del espacio, no están, de ninguna manera, impuestas sobre la mecánica invariablemente.

VI. MENTE Y ESPACIO

La experiencia, por tanto, ha desempeñado únicamente un papel, a saber, ha servido como motivo. Pero este papel ha sido, no obstante, muy importante, y he creído necesario darle prominencia. Este papel hubiese sido inútil si existiese una forma *a priori* impuesta sobre nuestra sensibilidad, y que hubiese sido el espacio de tres dimensiones.

¿Existe esta forma o, si se prefiere, podemos representarnos un espacio de más de tres dimensiones? Y antes que nada, ¿qué significa esta cuestión? En el sentido verdadero de la palabra, es claro que no podemos representarnos un espacio de cuatro, ni un espacio de tres dimensiones. Primero, no podemos representarnos tales espacios como vacíos, y no más podemos representarnos un objeto ya sea en un espacio de cuatro o de tres dimensiones porque: (1) estos espacios son ambos infinitos y no podemos representarnos una figura *en* el espacio, esto es, la parte *en* el todo, sin representar el todo, y lo anterior es imposible, porque éste es infinito; (2) estos espacios son ambos continuos matemáticos y únicamente podemos representarnos un continuo físico; (3) estos espacios son ambos homogéneos, y los marcos en donde incluimos nuestras sensaciones, siendo limitados, no pueden ser homogéneos.

De esta forma, la cuestión sólo puede ser comprendida de otra manera: ¿es posible imaginar que, habiendo sido distintos los resultados de la experiencia referidos antes, pudiésemos haber llegado a atribuir al espacio más de tres dimensiones? ¿Imaginar, por ejemplo, que la sensación de acomodamiento pudiese no haber sido

constante con la sensación de convergencia de los ojos o, en realidad, que la experiencia de la que hemos hablado antes y de la que expresamos un resultado al decir que "el tacto no opera a distancia" pudo habernos llevado a una conclusión inversa?

Y entonces, evidentemente, sí es posible. En el momento en que uno imagina una experiencia, imagina, sólo por esto, los dos resultados contrarios que pudo dar. Tal cosa es posible, pero a la vez difícil, porque tenemos que superar una multitud de asociaciones de ideas que son el fruto de una larga experiencia personal e incluso de una mayor experiencia como especie humana. ¿Son estas asociaciones (o por lo menos aquellas que hemos heredado de nuestros ancestros) las que constituyen esta forma *a priori* de la que se dice únicamente tenemos una intuición pura? Entonces no veo por qué uno deba declararse reacio a analizarlas y me niegue el derecho a investigar sus orígenes.

Cuando se dice que nuestras sensaciones están "extendidas", solamente se quiere decir una cosa: siempre están asociadas con la idea de ciertas sensaciones musculares, correspondientes con los movimientos que nos permiten alcanzar el objeto que las causa, que nos permiten, en otras palabras, defendernos de tales objetos. Y es precisamente porque esta asociación es útil a la defensa del organismo, que resulta tan vieja en la historia de la especie y nos parece indestructible. Sin embargo, es sólo una asociación y podemos concebir que pueda romperse; de tal forma que no podemos decir que la sensación no pueda entrar en la consciencia sin entrar en el espacio, pero que en realidad no entra en la consciencia sin entrar en el espacio, es decir, sin estar enredada en esta asociación.

No más puedo entender la idea de que el tiempo es lógicamente subsecuente al espacio, porque nos representamos a aquél únicamente bajo la forma de una línea recta; es como decir que el tiempo es lógicamente subsecuente a la cultivación de las praderas, porque usualmente está representado por una guadaña. Ni que decir tiene que uno no pueda representarse simultáneamente las distintas partes del tiempo, debido a que el carácter esencial de estas partes es precisamente no ser simultáneas. Eso no significa que no tengamos intuición alguna del tiempo. En tal caso, tampoco tendríamos intuición del espacio, porque tampoco podemos representárnoslo, en sentido estricto, por las razones ya mencionadas. Lo que nos representamos bajo el nombre de recta es una cruda imagen que tan mal asemeja la recta geométrica como el tiempo mismo.

¿Por qué se ha dicho que todo intento por dar una cuarta dimensión al espacio siempre lleva a éste a una de las otras tres (dimensiones)? Es fácil de comprender.

Consideremos nuestras sensaciones musculares y las “series” que pueden formar. Como consecuencia de numerosas experiencias, las ideas de estas series están conjuntamente asociadas en una compleja trama; nuestras series están, pues, *clasificadas*. Permítaseme, para mayor comodidad del lenguaje, expresar mi pensamiento en una forma totalmente cruda e incluso inexacta al decir que nuestras series de sensaciones musculares están clasificadas en tres clases correspondientes a las tres dimensiones del espacio. Por supuesto que esta clasificación es mucho más compleja, pero lo anterior es suficiente para que se comprenda mi razonamiento. Si quisiésemos imaginar una cuarta dimensión, debemos suponer otra serie de sensaciones musculares que formen parte de una cuarta clase. Pero como *todas* nuestras sensaciones musculares ya han sido clasificadas en alguna de las tres clases preexistentes, únicamente podemos representarnos una serie perteneciente a una de estas tres clases, de tal forma que nuestra cuarta dimensión nos lleva de vuelta a una de las otras tres.

¿Qué prueba lo anterior? Esto: que primero hubiese sido necesario destruir la antigua clasificación y reemplazarla por una nueva en donde las series de sensaciones musculares estuviesen distribuidas en cuatro clases. Así, la dificultad hubiera desaparecido.

A veces lo anterior se presenta bajo una forma más llamativa. Supongamos que estoy encerrado en una cámara entre seis límites infranqueables, formados por las cuatro paredes, el piso y el techo; sería imposible para mí salir de ahí e imaginarme saliendo. Perdón pero, ¿no podrías imaginar que la puerta se abre, o que dos de estas paredes se separan? Se respondería, por supuesto, que uno debe suponer que estas paredes permanecen inmóviles. Sí, pero es evidente que tengo el derecho a moverme, y entonces las paredes que suponemos absolutamente en reposo estarán moviéndose con respecto a mí. Sí, pero tal movimiento relativo no es nada; cuando los objetos están en reposo, su movimiento relativo con respecto a cualesquiera ejes es el de un sólido rígido. Ahora, los movimientos aparentes que tú imaginas no están en conformidad con las leyes del movimiento de los sólidos rígidos. Sí, pero es la experiencia la que nos ha enseñado las leyes del movimiento de un sólido rígido; nada nos impide *imaginar* tales movimientos de manera distinta. Para resumir, es claro que para que me imagine saliendo de mi prisión, únicamente tengo que imaginar que las paredes parecen abrirse a medida que me muevo.

Creo, por lo tanto, que si por espacio se entiende un continuo matemático de tres dimensiones, donde de otra sería amorfo, es porque la mente así lo construye, pero no lo

construye de la nada, sino que necesita materiales y modelos. Estos materiales, así como los modelos, preexisten en ella. Pero no hay modelo alguno que esté impuesto sobre la mente; puede *elegirse*, por ejemplo, entre un espacio de cuatro o de tres dimensiones. ¿Cuál es entonces el papel de la experiencia? Dar las indicaciones a partir de las cuales se hace la elección.

Una cosa más: ¿de dónde obtiene el espacio su carácter cuantitativo? Proviene del papel que las series de sensaciones musculares desempeñan en su génesis. Estas son series que pueden *repetirse a sí mismas*, y es de esta repetición de donde viene tal carácter cuantitativo: es porque pueden repetirse indefinidamente por lo que el espacio es infinito. Finalmente hemos visto, al final de la sección 3, que es también por esto por lo que el espacio es relativo. De tal suerte que es la repetición la que ha dado al espacio sus características esenciales. Ahora bien, la repetición supone tiempo, y esto es suficiente para decir que el tiempo es lógicamente anterior al espacio.

VII. EL PAPEL DE LOS CANALES SEMICIRCULARES

Hasta ahora no he hablado del papel de ciertos órganos a los que los fisiólogos atribuyen, y con razón, una importancia capital. Me refiero a los canales semicirculares. Numerosos experimentos han demostrado suficientemente que estos canales resultan necesarios a nuestro sentido de orientación; pero los fisiólogos no están completamente de acuerdo, y se han propuesto dos teorías opuestas, aquella de Mach-Delage y la del señor de Cyon.

El señor de Cyon es un fisiólogo que ha hecho ilustre su nombre por importantes descubrimientos sobre la inervación del corazón; sin embargo, no puedo estar de acuerdo con sus ideas relativas a la cuestión que nos ocupa. No siendo un fisiólogo, titubeo al criticar los experimentos que ha dirigido contra la teoría adversa de Mach-Delage; me parece, no obstante, que no son convincentes porque, en muchos de ellos, la presión *total* fue hecha para variar en uno de los canales, mientras que, fisiológicamente, lo que varía es la *diferencia* entre las presiones de ambas extremidades del canal; en otros, los órganos estuvieron sujetos a profundas lesiones, lo que sin duda debe alterar sus funciones.

Por otra parte, esto no es importante; los experimentos, si fueron irreprochables, pudieran ser convincentes contra la vieja teoría, pero no serían convincentes *para* la nueva teoría. En realidad, si en verdad he comprendido la teoría, mi explicación

resultaría suficiente para comprender que es imposible concebir un experimento que la confirme.

Los tres pares de canales tendrían, como única función, decirnos que el espacio tiene tres dimensiones. Los ratones japoneses tienen solamente dos pares de canales; ellos creen, parece ser, que el espacio solamente tiene dos dimensiones, y manifiestan esta opinión de la forma más rara posible: se ponen en un círculo y, así ordenados, giran rápidamente alrededor. Las lampreas, teniendo solamente un par de canales, creen que el espacio tiene únicamente una dimensión, pero sus manifestaciones son menos turbulentas.

Es evidente que tal teoría es inadmisible. Los órganos sensoriales están designados para informarnos sobre los *cambios* que suceden en el mundo exterior. No podríamos comprender por qué el Creador nos hubiese dado órganos destinados para llorar incesantemente: recordemos que el espacio tiene tres dimensiones, ya que el número de estas dimensiones no está sujeto a cambio.

Debemos, por consiguiente, regresar a la teoría de Mach-Delage. Lo que los nervios de los canales pueden decirnos es la diferencia de presión en dos extremidades del mismo canal y, de este modo: (1) la dirección de la vertical con respecto a tres ejes rígidamente ligados a la cabeza; (2) los tres componentes de la aceleración de traslación del centro de gravedad de la cabeza; (3) las fuerzas centrífugas desarrolladas por la rotación de la cabeza; (4) la aceleración del movimiento de rotación de la cabeza.

De los experimentos del señor Delage se sigue que es esta última indicación la más importante, sin duda porque los nervios son menos sensibles a la diferencia de la presión por sí misma que a las bruscas variaciones de esta diferencia. Las tres primeras indicaciones pueden, pues, ser obviadas.

Conociendo la aceleración del movimiento de rotación de la cabeza en cada instante, deducimos de ella, por una integración inconsciente, la orientación final de la cabeza, referida a cierta orientación inicial tomada como origen. Los canales circulares contribuyen, por tanto, a informarnos de los movimientos que hemos ejecutado, y sobre la misma base que las sensaciones musculares. Entonces cuando arriba hablamos de las series S o de las series Σ, debimos decir, no que éstas fuesen series de sensaciones musculares por sí mismas, sino que eran, al mismo tiempo, series de sensaciones musculares debido a los canales semicirculares. Aparte de esta adición, no tenemos nada que cambiar en lo que precede.

En las series S y Σ, estas sensaciones de los canales semicirculares evidentemente tienen un lugar muy importante. Aunque, por sí mismas, no serían suficientes, porque únicamente pueden decirnos algo acerca de los movimientos de la cabeza, y no nos dicen nada acerca de los movimientos relativos del cuerpo, o de los miembros con respecto a la cabeza. Y más aún: parece que nos informan únicamente sobre las rotaciones de la cabeza y no sobre las traslaciones que pueda experimentar.

PARTE II

LAS CIENCIAS FÍSICAS

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y FÍSICA

I

Sin duda se han preguntado de qué sirven las matemáticas y si sus delicadas construcciones enteramente mentales no son en realidad artificiales y producto de algún capricho.

Entre los que plantean esta cuestión haré una distinción. Las personas prácticas piden de nosotros únicamente los medios para hacer dinero. Tales personas no merecen respuesta alguna, y más bien sería apropiado preguntarles cuál es el bien de acumular tanta riqueza y si, mientras se acumula, debe uno descuidar al arte y la ciencia, que por sí mismas son dignas de disfrute, “y entonces, por el bien de la vida, sacrificar toda razón para vivir”.

Además, una ciencia concebida únicamente en vista de aplicaciones es imposible, porque las verdades son fecundas sólo si están unidas. Si solamente nos dedicásemos a aquellas verdades de las que esperamos un resultado inmediato, los enlaces intermediarios estarían ausentes y ya no habría cadena alguna.

Los hombres más desdeñosos de la teoría obtienen de ella, sin sospecharlo, su pan de cada día; privados de esta comida, el progreso rápidamente cesaría, y pronto nos encontraríamos en la inmovilidad de China.

Pero ya basta de ser intransigentes con los hombres prácticos. Además de ellos, existen aquellos que sólo se interesan por la naturaleza, y nos preguntan si podemos permitirles conocerla mejor.

Para responder a estos últimos, únicamente tenemos que mostrarles los aún toscos monumentos de la mecánica celestial y la física matemática.

Sin duda concederían que estas estructuras bien valen la pena el trabajo que han costado. Pero esto no es suficiente. Las matemáticas tienen un triple objetivo. Deben proveer de un instrumento para el estudio de la naturaleza. Pero esto sigue sin ser todo: tienen también un objetivo filosófico y, me atrevo a mantener, un objetivo estético. Deben ayudar al filósofo a penetrar en las nociones del número, el espacio, y el tiempo. Y, por encima de todo, sus adeptos encuentran en ellas deleites análogos a aquellos proporcionados por la pintura y la música. Admiran la delicada armonía de los números y las formas; se maravillan cuando un nuevo descubrimiento abre para ellos una perspectiva inesperada. ¿Y no es cierto que el goce que así sienten posee un carácter estético, incluso cuando los sentidos no tomen parte en él? Solamente unos pocos privilegiados son llamados para disfrutar este goce, es cierto, ¿pero no es este el caso de todas las artes nobles?

Es por esto que no tengo duda alguna al decir que las matemáticas merecen ser cultivadas por sí mismas, tanto las teorías inaplicables a la física como otras. Incluso si el objetivo físico y el estético no estuviesen unidos, no debemos sacrificar alguno.

Hay más: estos dos objetivos son inseparables y el mejor medio para alcanzar uno es apuntar al otro, o por lo menos nunca perderlo de vista. Esto es lo que intentaré demostrar al exponer la naturaleza de las relaciones entre la ciencia pura y sus aplicaciones.

El matemático no debe ser para el físico un mero proveedor de fórmulas, sino que debe haber entre ellos una colaboración más íntima. La física matemática y el análisis puro no son simples poderes adyacentes que mantienen buenas relaciones vecinales, sino que se compenetran mutuamente y su espíritu es el mismo. Esto se entenderá mejor cuando haya mostrado qué obtiene la física de las matemáticas y qué toman, en cambio, las matemáticas de la física.

II

El físico no puede pedir al analista que le revele una nueva verdad; este último puede, como mucho, ayudarle a preverla. Hace ya mucho que era posible soñar con anticiparse a los experimentos, o con construir todo el mundo sobre ciertas hipótesis prematuras.

Ya que todas esas construcciones en donde todavía se poseía una alegría ingenua son muy antiguas, hoy sólo quedan sus ruinas.

Todas las leyes se deducen, por tanto, del experimento; pero para enunciarlas es necesario un lenguaje especial. El lenguaje ordinario es muy pobre para este fin, y es además muy vago para expresar relaciones tan delicadas, tan ricas, y tan precisas.

Esta es entonces una razón por la cual el físico no puede ser sin las matemáticas, ya que éstas le proveen del único lenguaje en el que puede hablar. Y un lenguaje bien hecho no es poca cosa; para no ir más allá de la física, el desconocido hombre que inventó la palabra *calor* consagró muchas generaciones al error. El calor ha sido tratado como una sustancia, simplemente porque se le designó por un sustantivo, y ha sido pensado como indestructible.

Por otra parte, aquél que inventó la palabra *electricidad* tuvo la buena fortuna de, implícitamente, dotar a la física de una *nueva* ley, a saber, la de la conservación de la energía que, por pura casualidad, se ha encontrado que es exacta, por lo menos hasta hoy.

Pues bien, para continuar el símil, los escritores que embellecen un lenguaje, que lo tratan como un objeto propio del arte, hacen de él, al mismo tiempo, un instrumento mucho más flexible, más apto para reproducir sombras del pensamiento.

Comprendemos, pues, cómo es que el analista, al perseguir un objetivo puramente estético, ayuda a crear, sólo por eso, un lenguaje más propio para satisfacer al físico.

Pero esto no es todo: la ley surge del experimento, pero no inmediatamente. El experimento es individual, la ley deducida de él es general; el experimento es solamente aproximado, la ley es precisa, o por lo menos pretende serlo. El experimento es realizado bajo condiciones siempre complejas, la enunciación de la ley elimina estas complicaciones. Esto es lo que se llama “corregir errores sistemáticos”.

En pocas palabras, para obtener una ley del experimento, es necesario generalizar; esta es una necesidad impuesta sobre el observador más circunspecto. ¿Pero cómo generalizar? Cada verdad particular puede, evidentemente, ser extendida en infinidad de formas. Entre estas miles de rutas abiertas ante nosotros, es necesario hacer una elección, por lo menos provisional. ¿Qué nos guía en esta elección?

Únicamente puede ser la analogía. ¡Pero qué vaga es esta palabra! Los hombres primitivos solamente conocían analogías crudas, toscas, aquellas que impactan los

sentidos, aquellas de colores o de sonidos. Nunca pudo haber soñado en comparar la luz con el calor radiante.

¿Qué es lo que nos ha enseñado a conocer la verdad, las analogías profundas, aquellas que el ojo no ve pero la razón adivina?

Es el espíritu matemático, que desdeña la materia para adherirse a la forma pura. Esto es lo que nos ha enseñado a dar el mismo nombre a cosas difiriendo sólo materialmente, a llamar por el mismo nombre, por ejemplo, a la multiplicación de cuaterniones y de números enteros.

Si los cuaterniones, de los que acabo de hablar, no hubiesen sido utilizados tan pronto por los físicos ingleses, sin duda muchas personas verían en ellos una inútil fantasía y, no obstante, al enseñarnos a comparar lo que las apariencias separan, ya nos han hecho más aptos para penetrar en los secretos de la naturaleza.

Tales son los servicios que deben esperar los físicos de loa analistas, pero para que esta ciencia sea capaz de prestar tales servicios, debe ser cultivada de la manera más amplia sin esperar una utilidad inmediata; el matemático debe trabajar como un artista.

Lo que pedimos de él es que nos ayude a ver, a discernir nuestro camino en el laberinto que se abre ante nosotros. Ahora, él ve mejor que nadie quién destaca más. Los ejemplos abundad, pero me limitaré a los más llamativos.

El primero nos mostrará cómo cambiar un lenguaje es suficiente para revelar generalizaciones antes insospechadas.

Cuando se sustituye la ley de Newton por la de Kepler, únicamente conocemos al movimiento elíptico. Ahora bien, en lo que concierne a este movimiento, ambas leyes difieren solamente en la forma: pasamos de una a la otra por una simple diferenciación. Con todo, de la ley de Newton pueden deducirse, a partir de una generalización inmediata, todos los efectos de las perturbaciones y la totalidad de la mecánica celestial. Si, por otra parte, hubiese sido retenida la enunciación de Kepler, nadie hubiera nunca considerado a las órbitas de los planetas perturbados - aquellas complicadas curvas sobre las que nadie ha escrito ecuación alguna - como las generalizaciones naturales de la elipse. El progreso de las observaciones sólo hubiera servido para crear fe dentro del caos.

El segundo ejemplo es igualmente digno de consideración.

Cuando Maxwell comenzó su trabajo, las leyes de la electrodinámica admitían representaciones de todos los hechos conocidos. No fue un nuevo experimento el que vino a invalidarlas, sino Maxwell que, al ver tales leyes bajo una nueva concepción,

observó que las ecuaciones se volvían más simétricas cuando se añadía un término que, además, resultaba demasiado pequeño como para producir efectos apreciables con los viejos métodos.

Sabemos que las visiones *a priori* de Maxwell esperaron veinte años por una confirmación experimental o, si se prefiere, Maxwell se adelantó veinte años al experimento. ¿Cómo es que obtuvo su triunfo?

Fue porque Maxwell estaba profundamente empapado en el significado de la simetría matemática. ¿Habría sido así si antes que él nadie hubiese estudiado tal simetría por su propia belleza?

Fue porque Maxwell estaba acostumbrado a “pensar en vectores”, y a pesar de todo, fue a través de la teoría de los números imaginarios (neomónicos) que fueron introducidos los vectores en el análisis. Y aquellos que inventaron tales números imaginarios difícilmente sospecharon de los avances que se obtendrían de ellos para el estudio del mundo real; de esto es prueba suficiente el nombre dado a tales números.

En pocas palabras, Maxwell quizá no fue un analista capaz, pero esta habilidad hubiese sido para él una carga inútil y molesta. Por otro lado, tenía en la más alta estima al íntimo sentido de las analogías matemáticas. De ahí que haya hecho una buena física matemática.

El ejemplo de Maxwell nos enseña una cosa más.

¿Cómo deben ser tratadas las ecuaciones de la física matemática? ¿Debemos simplemente deducir todas las consecuencias, y considerarlas como realidades intangibles? En absoluto. Lo que deben enseñarnos, sobre todo, es qué podemos y qué debemos cambiar. Es así que obtenemos de ellas algo útil.

El tercer ejemplo nos muestra cómo es que podemos percibir las analogías matemáticas entre fenómenos que físicamente no tienen relación alguna, ni aparente ni real, de tal forma que las leyes de uno de estos fenómenos nos ayudan a adivinar las del otro fenómeno.

La misma ecuación de Laplace se encuentra en la teoría de la atracción newtoniana, en la del movimiento de los líquidos, en la del potencial eléctrico, en la del magnetismo, en la de la propagación del calor, y en muchas otras. ¿Cuál es el resultado de esto? Estas teorías parecen imágenes copiadas unas de las otras, mutuamente iluminándose, y adoptando un determinado lenguaje unas de las otras. Preguntemos a los electricistas si no se congratulan de haber inventado la frase flujo de fuerza, sugerida por la hidrodinámica y la teoría del calor.

Así, las analogías matemáticas no solamente nos permiten prever las analogías físicas, sino que no cesan de ser útiles cuando estas últimas fallan.

Para resumir, basta decir que el objetivo de la física matemática no es solamente facilitar a los físicos los cálculos numéricos de ciertas constantes o la integración de ciertas ecuaciones diferenciales. Es, además y sobre todo, revelarle al físico la armonía oculta de las cosas al hacer que las vea bajo una nueva perspectiva.

De todas las partes del análisis, la más elevada, la más pura, por decirlo así, será la más fructífera en las manos de aquellos que saben cómo utilizarla.

III

Veamos ahora qué debe el análisis a la física.

Sería necesario olvidar por completo la historia de la ciencia para no recordar que el deseo de comprender la naturaleza ha tenido, en el desarrollo de las matemáticas, la influencia más constante y afortunada.

En primer lugar, el físico plantea problemas cuya solución espera de nosotros. Pero al proponérnoslos, ya nos ha pagado por mucho por el servicio que debemos prestarle si los resolvemos.

Si se me permite continuar con mi comparación con las artes, el matemático puro que se haya olvidado de la existencia del mundo exterior sería como un pintor que sabe cómo combinar armoniosamente colores y formas, pero sin modelo alguno. Su poder creativo se agotaría rápidamente.

Las combinaciones que pueden formar los números y los símbolos constituyen una multitud infinita. En esta multitud, ¿cómo debemos escoger aquellos que merecen nuestra atención? ¿Debemos guiarnos únicamente por capricho? Este capricho, que además, por sí mismo, pronto se agotaría, sin duda nos llevaría demasiado lejos y rápidamente dejaríamos de entendernos unos con otros.

Pero ésta es sólo la parte más pequeña de la cuestión. La física sin duda prevendría nuestro extravío, pero también nos salvaría de un peligro mucho mayor: nos prevendría de dar la vuelta, incesantemente, sobre el mismo círculo.

La historia nos prueba que la física no solamente nos ha forzado a escoger entre los problemas que se presentan en multitud, sino que también se ha impuesto sobre nosotros de una manera tal que nunca hubiésemos siquiera soñado. Sin importar qué tan variada pueda ser la imaginación del hombre, la naturaleza es mil veces más rica. Para

seguirla, debemos tomar caminos que alguna vez hemos abandonado, y estos caminos a menudo conducen a cumbres donde descubrimos nuevos países. ¡¿Qué podría ser más útil?!

Es con los símbolos matemáticos y con las realidades físicas, es al comparar los diferentes aspectos de las cosas cuya armonía interna somos capaces de comprender, lo que por sí mismo es bello y, consecuentemente, digno de nuestros esfuerzos.

El primer ejemplo que citaré es tan antiguo que estamos tentados a olvidarlo; es, no obstante, el más importante de todos.

El único objeto natural del pensamiento matemático es el número entero. Es el mundo externo el que nos ha impuesto al continuo, que sin duda inventamos nosotros, pero que nos hemos visto forzados a hacerlo. Sin él, no habría análisis infinitesimal; toda la ciencia matemática se reduciría a la aritmética o a la teoría de sustituciones.

Por el contrario, nos hemos dedicado al estudio del continuo casi todo el tiempo y con todas nuestras fuerzas. ¿Quién lo lamentaría? ¿Quién pensaría que este tiempo y esta fuerza han sido malgastados? El análisis despliega ante nosotros infinitas perspectivas que en la aritmética son insospechables. Nos muestra, de un vistazo, un majestuoso montaje cuyo orden es simple y simétrico; por otra parte, en la teoría de números, donde reina lo imprevisto, la vista se encuentra, por decirlo de alguna manera, detenida en cada paso.

Sin duda podrá decirse que fuera del número entero no hay rigor alguno, y consecuentemente, no hay verdad matemática alguna; que el número entero se oculta en todas partes, y que debemos esforzarnos en hacer transparentes las mantas que lo cubren, incluso si, al hacerlo, debemos resignarnos a repeticiones interminables. No seamos tan puristas y estemos más bien agradecidos con el continuo ya que, si *todo* surge del número entero, fue, por sí mismo, capaz de proceder *mucho* desde ahí.

¿Necesito también recordad que el señor Hermite obtuvo un provecho sorprendente al introducir variables continuas en la teoría de los números? Así, el propio dominio del número entero está invadido, y esta invasión ha establecido orden donde reinaba el desorden.

Veamos qué debemos al continuo y consecuentemente a la naturaleza física.

Las series de Fourier son un precioso instrumento del cual el análisis hace un uso continuo, y es por este medio que ha sido posible representar funciones discontinuas. Fourier las inventó para resolver un problema de física relativo a la propagación del calor. Si este problema no hubiese surgido de manera natural, nunca

nos hubiéramos atrevido a dar su lugar a la discontinuidad, y aún consideraríamos a las funciones continuas como las únicas funciones verdaderas.

La noción de función ha sido, de este modo, extendida considerablemente y ha recibido, por parte de algunos lógicos-analistas, un desarrollo imprevisto. Estos analistas se han aventurado a regiones donde reina la abstracción más pura y han ido tan lejos como resulta posible del mundo real. Y, con todo esto, fue un problema físico el que suministró la ocasión.

Después de las series de Fourier, otras series análogas han entrado al dominio del análisis, y lo han hecho por la misma puerta, han sido, pues, imaginadas en vista de aplicaciones.

La teoría de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden tiene una historia análoga. Ha sido desarrollada, principalmente, por y para la física. Pero puede tomar muchas formas, porque tal tipo de ecuación no es suficiente para determinar la función incógnita, y por tanto es necesario adjuntar a ella condiciones complementarias llamadas condiciones en los límites, de donde surgen muchos problemas distintos.

Si los analistas se hubiesen abandonado a sus tendencias naturales, no conocerían sino una de ellas [ecuaciones], aquella que la señora Kovalevski ha tratado en su célebre memoria. Pero hay una multitud de otras [ecuaciones] que hubiesen ignorado. Cada una de las teorías de la física, la de la electricidad, la del calor, nos presenta estas ecuaciones bajo un nuevo aspecto. Puede entonces decirse que sin estas teorías no conoceríamos las ecuaciones diferenciales parciales.

No es necesario multiplicar los ejemplos. He dado los suficientes como para concluir lo siguiente: cuando los físicos piden de nosotros la solución de un problema, no nos imponen un deber de servicio sino que, por el contrario, debemos estarles agradecidos.

IV

Pero lo anterior no es todo. La física no solamente nos permite resolver problemas, también nos ayuda a encontrar los medios para resolver los mismos, y eso de dos maneras: nos hace prever la solución, y nos sugiere argumentos.

He hablado arriba de la ecuación de Laplace que se encuentra en una multitud de diversas teorías físicas. Se encuentra de nuevo en la geometría (en la teoría de la

representación conforme), y en el análisis puro (en la teoría de los números imaginarios).

De esta forma, en el estudio de las funciones de variables complejas, el analista, junto con imágenes geométricas - que constituyen su instrumento usual - encuentra muchas imágenes físicas que puede emplear con el mismo éxito. Gracias a estas imágenes, puede inmediatamente ver lo que la deducción pura le mostraría sólo sucesivamente. De esta forma reúne los elementos separados de la solución, y por una suerte de intuición, adivina antes de poder demostrar.

¡Adivinar antes de demostrar! ¿Necesito recordar que así se han hecho todos los descubrimientos importantes? ¡Cuántas son las verdades que las analogías físicas nos permiten presentar y que no estamos en condiciones de establecer a partir de un razonamiento riguroso!

Por ejemplo, la física matemática introduce un gran número de desarrollos en series. Nadie duda que estos desarrollos converjan, pero la certeza matemática está ausente. Estas son tantas conquistas aseguradas para los investigadores que vengan después de nosotros.

Por otra parte, la física no solamente provee soluciones, también, en cierta medida, argumentos. Es suficiente con recordar cómo Felix Klein, en una cuestión relativa a las superficies de Riemann, recurrió a las propiedades de las corrientes eléctricas.

Es cierto que los argumentos de esta especie no son rigurosos en el sentido que el analista da a esta palabra. Y aquí surge una cuestión: ¿Cómo puede una demostración no lo suficientemente rigurosa al analista resultar suficiente al físico? Parece ser que no puede haber dos rigores, que el rigor es o no es y que, donde no lo es, no puede haber deducción alguna.

Esta aparente paradoja será mejor comprendida al recordar bajo qué condiciones se aplica el número a los fenómenos naturales. ¿De dónde vienen, en general, las dificultades al buscar rigor? Las atacamos casi siempre al buscar establecer que alguna cantidad tienda hacia algún límite, o que alguna función sea continua, o que tenga una derivada.

Ahora bien, los números que los físicos miden a partir de experimentos nunca son conocidos sino aproximadamente; además, cualquier función siempre difiere tanto como se quiera de una función discontinua y, al mismo tiempo, difiere tanto como se quiera de una función continua. El físico puede, por tanto, suponer a voluntad que la

función estudiada es continua, o que es discontinua, que tiene o no una derivada, y puede hacerlo sin miedo a ser contradicho tanto por la experiencia presente como por cualquier experimento futuro. Vemos que, con tal libertad, juega con dificultades que detienen al analista. Siempre puede razonar como si todas las funciones que ocurren en sus cálculos fuesen polinomios enteros.

Así, el bosquejo que resulta suficiente al físico no es la deducción que requiere el analista. No se sigue de esto que uno no pueda ayudar al otro en encontrar tal complemento. Tantos bosquejos físicos han sido transformados en demostraciones rigurosas que, hoy en día, tal transformación es fácil. Habría tantos ejemplos que, no obstante, no citaré para no cansar al lector.

Espero haber dicho lo suficiente para mostrar que el análisis puro y la física matemática pueden servir una a la otra sin hacer sacrificio alguno, y que cada una de estas dos ciencias debe regocijarse en todo lo que exalta a su socia.

CAPÍTULO VI

ASTRONOMÍA

Los gobiernos y los parlamentos deben encontrar en la astronomía una de las ciencias más costosas: el menor de los instrumentos cuesta cientos de miles de dólares, así como el menor de los observatorios, y cada eclipse lleva consigo créditos suplementarios. Y todo lo anterior por estrellas tan lejanas y completamente ajenas a nuestras contiendas electorales, y que con toda probabilidad nunca tomarán parte en ellas. Debe ser que nuestros políticos han conservado un remanente de idealismo, un vago instinto de qué es lo grandioso; en verdad pienso que han sido calumniados, y deben ser alentados y demostrar que este instinto no los engaña, que no son incautos de tal idealismo.

En realidad, podríamos hablarles acerca de la navegación, cuya importancia nadie puede subestimar, y que necesita de la astronomía. Pero esto sería tomar la cuestión por su lado menos importante.

La astronomía es útil porque se eleva por encima de nosotros; es útil porque es grandiosa, y es todo lo que debemos decir. Nos muestra qué tan pequeño es el cuerpo del hombre y qué tan grande es su mente, ya que su inteligencia puede abarcar la totalidad de esta deslumbrante inmensidad - en donde su cuerpo es únicamente un punto oscuro - y disfrutar su silenciosa armonía. Así obtenemos consciencia de nuestro poder, y esto es algo que no tiene precio, porque la consciencia nos vuelve más poderosos.

Pero antes que nada deseo mostrar hasta qué punto la astronomía ha facilitado el trabajo de otras ciencias, más útiles directamente, ya que nos ha dado un alma capaz de comprender la naturaleza.

Pensemos qué tan restringida estaría la humanidad si, bajo cielos constantemente nublados, tal como Júpiter debe ser, hubiese permanecido ignorante de las estrellas. ¿Seríamos lo que somos en tal mundo? Sabemos bien que, bajo esta sombría bóveda, estaríamos privados de la luz del Sol, tan necesaria a los organismos que habitan la Tierra. Pero con su permiso, asumiremos que estas nubes son fosforescentes y emiten una suave y constante luz. Ya que estamos haciendo hipótesis, qué más da una más. Pues bien, repito la cuestión: ¿seríamos lo que somos en tal mundo?

Las estrellas no solamente nos mandan esa luz gruesa y visible que asombra nuestros ojos, sino que de ellas también proviene una luz mucho más sutil, que ilumina

nuestras mentes y cuyos efectos intentaré demostrar. Sabemos lo que era el hombre hace miles de años, y también lo que es ahora. Asilado en medio de una naturaleza donde todo era misterio para él, aterrorizado ante cada inesperada manifestación de fuerzas incomprensibles, era incapaz de observar, en la conducta del Universo, algo que no fuese el capricho. Atribuía todos los fenómenos a la acción de una multitud de pequeños dioses, fantásticos a la vez que severos, y para actuar sobre el mundo buscó conciliar con ellos por medios análogos a aquellos empleados para ganar la gracia de algún ministro o diputado. Ni siquiera sus fracasos lo iluminaron, por lo menos no más de lo que hoy se desanima un indigente hasta tal punto de dejar de mendigar.

Hoy en día no rogamos a la naturaleza. Mandamos sobre ella porque hemos descubierto ciertos de sus secretos y descubrimos otros día con día. Mandamos sobre ellas en el nombre de leyes que la misma naturaleza no puede desafiar, porque son sus propias leyes. No le pedimos que cambie tales leyes, sino que somos los primeros en someternos a ellas. La naturaleza sólo puede ser gobernada al obedecerla.

¡Qué cambio tan grande deben haber experimentado nuestras almas para pasar de un estado al otro! ¿Puede alguien creer que, sin las lecciones de las estrellas y bajo los cielos perpetuamente nublados que recién hemos supuesto, hubieran cambiado [las almas] tan rápido? ¿Hubiese sido posible tal metamorfosis? ¿No hubiese sido, por lo menos, mucho más lenta?

Y antes que nada, es la astronomía la que nos enseño que hay leyes. Los caldeos, que fueron los primeros en observar los cielos con cierta atención, observaron que esta multitud de puntos luminosos no era una que erraba al azar, sino más bien una especie de ejército disciplinado. Sin duda las reglas de esta disciplina se les escapaban, pero el armonioso espectáculo de las noches estrelladas fue suficiente para darles la impresión de regularidad, y eso fue, por sí mismo, algo realmente grande. Por otra parte, tales reglas fueron discernidas por Hiparco, Ptolomeo, Copérnico, Kepler, una después de otra y, finalmente - no es necesario recordarlo - fue Newton quien enunció la más antigua, precisa, simple y general de todas las leyes naturales.

Y después, instruidos por estos hombres, hemos contemplado mejor nuestro pequeño mundo terrestre y, bajo el aparente desorden, también hemos encontrado de nuevo la armonía que nos ha sido revelada por el estudio de los cielos. Tal armonía también es regular y también obedece leyes inmutables, aún cuando éstas sean más complicadas y en aparente conflicto unas con otras, y aún cuando un ojo inexperto únicamente viese en ellas caos, casualidad o capricho. Si no hubiésemos conocido las

estrellas, algunos espíritus audaces quizá intentarían prever algunos de los fenómenos físicos, pero sus fracasos serían frecuentes, y habrían de despertar las burlas de los vulgares. ¿No vemos que, incluso hoy en día, algunos meteorólogos a menudo se equivocan y ciertas personas hacen burla de ello?

¡Cuántas veces hubiesen caído los físicos en el desaliento, desanimados por tantos reveses, si no tuviesen, como sustento de su confianza, el brillante ejemplo del éxito de los astrónomos! Este éxito les mostró que la naturaleza obedece leyes. Solamente quedaba por saber qué leyes, y para tal propósito fue necesaria cierta paciencia, y tuvieron el derecho a demandar a los escépticos algún crédito.

Pero esto no es todo: la astronomía no sólo nos ha enseñado que hay leyes, sino que de estas leyes no hay escape alguno, que con ellas no hay transigencia posible. ¿Cuánto tiempo hubiésemos tardado en comprender tal hecho si únicamente conociésemos el mundo terrestre, en donde cada fuerza elemental siempre nos parecería en conflicto con otras fuerzas? La astronomía nos ha enseñado que las leyes son infinitamente precisas, y que si algunas las enunciamos como aproximadas, es porque no las conocemos bien. Aristóteles, la mente más científica de la antigüedad, todavía otorgaba una parte al accidente, a la casualidad, y parecía pensar que las leyes de la naturaleza, por lo menos las de aquí abajo, determinan solamente las grandes características de los fenómenos. ¡Cuánto ha contribuido la siempre creciente precisión de las predicciones astronómicas a corregir tal error, que hubiese hecho a la naturaleza ininteligible!

¿Pero no son estas leyes locales, variando de lugar en lugar, tal como las leyes que hace el hombre? ¿No es lo que es cierto en un rincón del Universo, en nuestro globo por ejemplo, o en nuestro pequeño sistema solar, falso un poco más lejos? ¿Y no podría también preguntarse si las leyes dependientes del espacio no lo son también del tiempo, si no son simples habitudes, transitorias y, por tanto, efímeras? De nuevo es la astronomía la que responde estas cuestiones. Consideremos las estrellas dobles: todas describen cónicas. De esta forma, en lo que concierne al telescopio, no alcanza los límites del dominio que obedece la ley de Newton.

Incluso la simplicidad de estas leyes constituye una lección para nosotros. ¿Cuántos fenómenos complicados están contenidos en las dos líneas de su enunciación? Las personas que no comprenden la mecánica celestial pueden formarse una idea de ella, por lo menos, a partir del tamaño de los tratados dedicados a esta ciencia. Y

después podría esperarse que la complejidad de los fenómenos físicos esconda, de igual forma, alguna simple causa aún desconocida.

Es entonces la astronomía la que nos ha mostrado cuáles son las características generales de las leyes naturales. Pero entre todas estas características hay una, la más sutil y la más importante de todas, en la que quiero hacer hincapié.

¿Cómo fue entendido el orden del Universo por los antiguos, por ejemplo, por Pitágoras, Platón o Aristóteles? Era o bien un tipo inmutable fijado de una vez por todas, o un ideal al que el mundo buscaba aproximarse. El mismo Kepler aún pensaba así cuando, por ejemplo, buscó si las distancias de los planetas con respecto al Sol no tenían alguna relación con los cinco poliedros regulares. Esta idea no era absurda en absoluto, pero sí era estéril, ya que la naturaleza no está compuesta así. Newton nos ha demostrado que una ley es sólo una relación necesaria entre el estado presente del mundo y su estado inmediatamente subsecuente. Todas las demás leyes descubiertas desde entonces no son nada más: son, en suma, ecuaciones diferenciales, pero es la astronomía la que ha suministrado el primer modelo para ellas, sin el que sin duda estaríamos en un error desde hace tiempo.

La astronomía también nos ha enseñado a hacer caso omiso de las apariencias. El día que Copérnico probó que aquello que se pensaba como lo más estable estaba en movimiento, y aquello que se pensaba moviéndose estaba fijo, nos mostró qué tan engañosos pueden resultar los infantiles razonamientos que surgen directamente de los datos inmediatos de nuestros sentidos. Es cierto que sus ideas no triunfaron fácilmente, pero desde que lo hicieron ya no hay prejuicio alguno tan inveterado que no podamos sacudirlo. ¿Cómo podemos estimar el valor de esta nueva arma así ganada?

Los antiguos pensaban que todo estaba hecho para el hombre, y esta ilusión debe ser muy tenaz, ya que cada vez debe ser combatida. A pesar de todo, es necesario despojarse de ella, o de lo contrario uno se encontrará en una miopía eterna, incapaz de ver la verdad. Para comprender la naturaleza uno debe ser capaz de salirse de sí mismo, por decirlo así, y contemplarla desde muchas perspectivas; de otra forma, nunca conoceríamos mas que una sola parte. Ahora bien, salirse de uno mismo es lo que no puede hacer aquel que refiere todo a sí mismo no puede hacer. ¿Quién nos libró de esta ilusión? Fueron aquellos que nos demostraron que la Tierra es únicamente uno de los planetas más pequeños del sistema solar, y que el sistema solar es solamente un punto imperceptible en los infinitos espacios del universo estelar.

Al mismo tiempo, la astronomía nos enseñó a no temer a los números grandes. Esto fue necesario no solamente para conocer los cielos, sino para conocer la Tierra por sí misma, y sin duda no fue tan fácil como parecería serlo hoy en día. Tratemos de remontarnos e imaginemos qué hubiera pensado un griego si le dijésemos que la luz roja vibra cuatrocientos millones de millones de veces por segundo. Sin duda alguna, tal aserción le hubiese parecido una insensatez pura, y nunca se hubiese rebajado a probarla. Hoy una hipótesis ya no nos parece absurda porque nos obliga a imaginar objetos mucho más grandes o pequeños que aquellos que nuestros sentidos son capaces de mostrarnos, y ya no comprendemos aquellos escrúpulos que detuvieron a nuestros predecesores y los previnieron de descubrir ciertas verdades simplemente porque temían a ellas. ¿Pero por qué? Es porque hemos visto a los cielos ampliarse cada vez más sin cesar; porque sabemos que el Sol se encuentra a 150 millones de kilómetros de la Tierra y que las distancias de las estrellas más cercanas son incluso cientos de miles de veces mayores. Habituados a la contemplación de lo infinitamente grande, nos hemos vuelto aptos para comprender lo infinitamente pequeño. Gracias a la educación que nuestra imaginación ha recibido podemos, como el ojo del águila que no se deslumbra ante el Sol, ver a la verdad a la cara.

¿Estaba equivocado al decir que es la astronomía la que ha hecho a nuestras almas capaces de comprender la naturaleza; que bajo los cielos nublados y sin estrellas la misma Tierra nos hubiese resultado eternamente ininteligible; que únicamente hubiésemos visto en ella capricho y desorden y que, sin conocer el mundo, nunca hubiésemos podido dominarlo? ¿Qué ciencia pudo haber sido más útil? Y al hablar así, me pongo en la postura de aquellos que solamente valoran las aplicaciones prácticas. Ciertamente, este punto de vista no es mío. En cuanto a mí respecta, por el contrario, si admiro las conquistas de la industria es porque, por encima de todo, si nos liberan de las preocupaciones materiales, algún día nos darán a todos la libertad para contemplar la naturaleza. Yo no digo: la ciencia es útil porque nos enseña a construir máquinas. Yo digo: las máquinas son útiles porque, al trabajar para nosotros, algún día nos dejarán más tiempo para hacer ciencia. Pero, por último, cabe recalcar que entre las dos posturas no hay antagonismo alguno, y que habiendo el hombre perseguido un objetivo desinteresado, todo lo demás ha venido por añadidura.

Auguste Comte dice en alguna parte que sería ocioso buscar conocer la composición del Sol, ya que este conocimiento no sería útil a la sociología. ¿Cómo es que puede ser tan miope? ¿No hemos visto que es gracias a la astronomía que, por

decirlo en su lenguaje, la humanidad ha pasado del estado teológico al positivo? Encontró una explicación para lo anterior porque tal cosa sucedió. ¿Pero cómo es que no ha entendido que lo que queda por hacer no es menos considerable y no será menos provechoso? La astronomía física, que él parece condenar, ya ha empezado a dar frutos, y nos dará muchos más porque sólo data de ayer.

Primero fue descubierta la naturaleza del Sol, aquello que el fundador del positivismo quería negarnos, y ahí fueron encontrados cuerpos que existen en la Tierra, pero habían permanecido sin ser descubiertos, como por ejemplo el helio, aquel gas casi tan ligero como el hidrógeno. Ya lo anterior contradice a Comte. Pero al espectroscopio debemos una preciosa lección en un sentido muy distinto: en las estrellas más distantes nos muestra las mismas sustancias. Podría haberse preguntado si los elementos terrestres no se deben a alguna casualidad que hubiese juntado más átomos tenues para construir de ellos el edificio más complejo que los químicos llaman átomos; si, en otras regiones del Universo, otros encuentros fortuitos no hubiesen engendrado edificios completamente distintos. Ahora sabemos que esto no es así, que las leyes de nuestra química son las leyes generales de la naturaleza, y que no deben nada a la casualidad que causó que nosotros naciésemos sobre la Tierra.

Pero, se dirá, la astronomía ha dado a las otras ciencias todo lo que puede darles, y ahora que los cielos nos han procurado los instrumentos que nos permiten estudiar la naturaleza terrestre, podrían, sin temor alguno, cubrirse para siempre. Después de lo que hemos dicho, ¿todavía hay necesidad de responder a esta objeción? Uno podría haber razonado de la misma forma en el tiempo de Ptolomeo, ya que también entonces los hombres pensaban saber todo, siendo que aún tenían todo por aprender.

Las estrellas son majestuosos laboratorios, crisoles gigantescos, como nunca químico alguno hubiese soñado. En ellas reinan temperaturas que nos resultan imposibles de entender. Su único defecto es estar un poco lejos, pero el telescopio pronto nos las acercará, y entonces veremos cómo es que se comporta la materia ahí. ¡Cuánta fortuna para los físicos y los químicos!

La materia se nos exhibirá ahí bajo miles de estados distintos, desde aquellos gases enrarecidos que parecen formar la nebulosa y que son luminosos con no sé qué brillantez de origen misterioso, hasta las estrellas incandescentes y los planetas tan cercanos y a la vez tan distintos.

Quizá incluso un día las estrellas nos enseñen algo acerca de la vida. Lo anterior parece un sueño insensato y no me imagino cómo puede cumplirse pero, hace cien años, ¿no parecía también la química de las estrellas un sueño disparatado?

Pero si limitamos nuestras miras a horizontes menos distantes, también habrá promesas menos contingentes y aún lo suficientemente seductoras. Si el pasado nos ha dado tanto, podemos estar seguros que el futuro nos dará aún más.

Después de todo, apenas podrá creerse todo lo útil que ha resultado a la humanidad la creencia en la astrología. Si Kepler y Tycho Brahe pudieron ganarse la vida fue porque vendieron a ingenuos reyes predicciones fundadas sobre las conjunciones de las estrellas. Si estos príncipes no hubiesen sido tan crédulos, quizá continuaríamos creyendo que la naturaleza obedece al capricho, y aún nos revolcaríamos en la ignorancia.

CAPÍTULO VII

LA HISTORIA DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

¿Cuál es el estado actual de la física matemática? ¿Cuáles son los problemas que ella misma se ha propuesto? ¿Cuál es su futuro? ¿Su orientación está cerca de modificarse?

De aquí a diez años, ¿aparecerán los objetivos y métodos de esta ciencia bajo la misma luz a nuestros sucesores inmediatos que a nosotros? O, por el contrario, ¿seremos testigos de una profunda transformación? Tales son las cuestiones que nos vemos forzados a plantear al entrar en nuestra investigación. Es fácil proponerlas, lo difícil es responderlas.

Si nos hubiésemos atrevido a hacer una predicción, fácilmente resistiríamos a tal tentación solamente al pensar en todas las estupideces que los sabios más eminentes de hace cien años hubiesen pronunciado si les preguntásemos qué sería de la ciencia del siglo diecinueve. Habrían pensado en sus predicciones como sólidas y decididas y, después del evento, los habríamos encontrado sumamente apocados. No esperen de mí, por tanto, profecía alguna.

Pero si, como todo físico prudente, rehúyo hacer una prognosis, no puedo evitar hacer un pequeños diagnóstico. Pues bien, hay indicios de una seria crisis, como si esperásemos que se acerque una transformación. Con todo esto, no seamos ansiosos: estamos seguros que el paciente no morirá, e incluso podemos esperar que esta crisis sea saludable, porque la historia parece garantizarlo. Esta crisis, en realidad, no es la primera, y para entenderla es importante recordad aquellas que la han precedido. Perdonen entonces un pequeño bosquejo histórico.

LA FÍSICA DE FUERZAS CENTRALES

La física matemática, tal como la conocemos, nació de la mecánica celeste, que dio luz a aquella a finales del siglo dieciocho, en el momento justo en que la propia mecánica celeste lograba su desarrollo completo. Especialmente durante sus primeros años, el infante sorprendentemente se parecía a su madre.

El Universo astronómico está formado por masas sin duda muy grandes, pero separadas por intervalos tan inmensos que nos parecen solamente puntos materiales. Estos puntos se atraen unos con otros de manera inversa al cuadrado de su distancia, y esta atracción es la única fuerza que influye en sus movimientos. Pero si nuestros sentidos fuesen los suficientemente perspicaces como para mostrarnos todos los detalles de los cuerpos estudiados por los físicos, el espectáculo así revelado apenas diferiría de aquel que el astrónomo contempla. También veríamos puntos materiales, separados unos de otros por intervalos enormes en comparación con sus dimensiones, y describiendo órbitas en concordancia con las leyes regulares. Estas estrellas infinitesimales son los átomos. Como las propias estrellas, se atraen o repelen unos con otros, y esta atracción o repulsión, siguiendo la línea recta que las acompaña, depende únicamente de la distancia. La ley de acuerdo con la cual esta fuerza varía como una función de la distancia quizá no es la de Newton, sino una análoga: en lugar del exponente -2, probablemente tengamos un exponente distinto, y es a partir de este cambio de exponente que surge toda la diversidad de los fenómenos físicos, la variedad de cualidades y de sensaciones, todo el mundo, coloro y sonoro, que nos rodea; en pocas palabras, toda la naturaleza.

Tal es la concepción primitiva en toda su pureza. Sólo queda buscar, en los diferentes casos, qué valor debe darse a este exponente para poder explicar todos los hechos. Es en este modelo en el que Laplace, por ejemplo, construyó su preciosa teoría sobre la capilaridad. La consideraba solamente como una caso particular de la atracción o, como prefería decir, de la gravitación universal, y nadie se asombra de encontrar tal teoría a la mitad de uno de los cinco volúmenes de la "Mécanique céleste". Más recientemente, Briot cree haber penetrado en el secreto final de la óptica al demostrar que los átomos de éter se atraen unos con otros en la razón [proporción] inversa de la sexta potencia de su distancia, ¿y no es el propio Maxwell el que dijo en algún lado que los átomos de los gases se repelen unos con otros en la razón inversa de la quinta potencia de su distancia? Tenemos entonces el exponente -6, o -5 en lugar de -2, pero es siempre un exponente.

Entre las teorías de esta época, sólo una es una excepción, a saber, la de Fourier. En ella, hay átomos actuando a una distancia unos sobre los otros, mutuamente transmitiéndose calor, pero nunca se atraen, nunca se mueven. Desde este punto de vista, la teoría de Fourier debe haber parecido a los ojos de sus contemporáneos, y a los de Fourier mismo, como imperfecta y provisional.

Esta concepción no estaba libre de grandeza: era seductiva y muchos de nosotros no hemos renunciado a ella. Uno sabe que alcanza los elementos últimos de las cosas solamente al desenredar, pacientemente, la complicada madeja dada por nuestros sentidos, que es necesario avanzar paso a paso, sin descuidar intermediarios algunos, y que nuestros padres estaban equivocados al querer saltarse etapas, aún cuando creyeran que, una vez llegados a estos elementos últimos, de nuevo se encontrarían con la majestuosa simplicidad de la mecánica celestial.

Tampoco ha resultado inútil esta concepción. Nos ha prestado un servicio inestimable, al haber contribuido a hacer más precisa la noción de la ley física.

Me explicaré mejor: ¿cómo es que entendían la ley [física] los antiguos? Para ellos significaba o bien una armonía interna, estática o, por así decirlo, inmutable; o bien un modelo al que la naturaleza intentaba imitar. Para nosotros, una ley es algo completamente distinto: es una relación constante entre el fenómeno de hoy y el de mañana; en una palabra, es una ecuación diferencial.

He aquí la forma ideal de la ley física, y fue Newton el primero que la invistió así. Si después nos hemos aclimatado a esta forma en la física es precisamente porque hemos copiado, en lo posible, esta ley de Newton, es decir, al imitar la mecánica celeste. Esta es, por otra parte, la idea que he intentado exponer en el capítulo VI.

LA FÍSICA DE LOS PRINCIPIOS

No obstante lo anterior, llegó un día cuando la concepción de las fuerzas centrales ya no pareció suficiente, y esta es la primera de aquellas crisis sobre las que ya he hablado.

¿Qué se hizo entonces? Se abandonó el intento de penetrar en los detalles de la estructura del Universo, de aislar las piezas de este vasto mecanismo, de analizar - una por una - las fuerzas que lo ponen en movimiento, y nos contentamos en tomar, como guías, ciertos principios generales cuyo objetivo expreso es ahorrarnos este minucioso estudio. ¿Cómo? Supongamos que tenemos ante nosotros cualquier máquina. Únicamente son visibles el trabajo de la rueda inicial y aquel de la rueda final, pero la transmisión, la maquinaria intermedia por la cual es comunicado el movimiento de una a otra rueda, está escondida en el interior y escapa a nuestra vista. No sabemos si la comunicación se hace a partir de engranajes o de cintas, o a partir de bielas o de cualquier otro artificio. ¿Diríamos que es imposible comprender cualquier cosa acerca de esta máquina mientras no podamos desmontarla en sus piezas? Sabemos bien que no,

y que el principio de la conservación de la energía nos resulta suficiente para determinar el punto más interesante. Fácilmente podemos comprobar que la rueda final gira diez veces menos rápido que la rueda inicial, ya que ambas son visibles. Somos capaces, por tanto, de concluir que una pareja [mecánica] aplicada a una será balanceada por una pareja diez veces mayor aplicada a la otra. Para lo anterior, no hay necesidad alguna de penetrar en el mecanismo de este equilibrio y de conocer cómo es que se compensan las fuerzas una con otra en el interior de la máquina; resulta suficiente con estar seguros que esta compensación no puede dejar de ocurrir.

Pues bien, en lo que respecta al Universo, el principio de la conservación de la energía es capaz de prestarnos el mismo servicio. El Universo también es una máquina, muchos más compleja que todas las de la industria, y en la cual casi todas las partes están profundamente escondidas de nosotros. Sin embargo, al observar el movimiento de aquellas que sí podemos ver, somos capaces - a partir de este principio - de sacar conclusiones que resultan ciertas no obstante los detalles del mecanismo invisible que las anima.

El principio de la conservación de la energía, o el principio de Mayer, es ciertamente el más importante, pero no es el único. Hay otros de los cuales podemos obtener la misma ventaja, y son los siguientes:

- El principio de Carnot, o el principio de la degradación de la energía.

- El principio de Newton, o el principio de la igualdad de acción y reacción.

- El principio de la relatividad, de acuerdo con el cual las leyes de los fenómenos físicos deben ser los mismos para un observador estacionario que para un observador transportado a lo largo en un movimiento uniforme de traslación, de tal suerte que no tenemos y no podemos tener medio alguno para discernir si somos o no llevados a lo largo de tal movimiento.

- El principio de la conservación de la masa, o el principio de Lavoisier.

- Y diré también que el principio de acción mínima.

La aplicación de estos cinco o seis principios generales a los distintos fenómenos físicos es suficiente para aprender de todos ellos, y podemos razonablemente esperar conocerlos. El ejemplo más notable de esta nueva física matemática es, sin duda, la teoría electro-magnética de la luz de Maxwell.

No sabemos nada acerca de qué es el éter, ni cómo es que están dispuestas sus moléculas, ni si se atraen o repelen unas a otras, pero sabemos que este medio transmite, al mismo tiempo, las perturbaciones ópticas y las perturbaciones eléctricas, y sabemos

que esta perturbación debe tener lugar en conformidad con los principios generales de la mecánica, y eso resulta suficiente para el establecimiento de las ecuaciones del campo electro-magnético.

Estos principios son el resultado de experimentos audazmente generalizados, pero parecen derivar, desde su propia generalidad, un alto grado de certeza. En realidad, mientras más generales sean, más frecuentes son las oportunidades para comprobarlas, y al multiplicarse las verificaciones - tomando las formas más variadas e inesperadas - se termina por no dejar lugar alguno para la duda.

Utilidad de la vieja física. Tal es la segunda fase de la historia de la física matemática, y aún no hemos salido de ella. ¿Debemos decir que la primera ha sido inútil, que durante cincuenta años la ciencia fue por el camino equivocado, y que no queda sino olvidar tantos esfuerzos acumulados condenados de antemano a fracasar por una concepción viciosa? En absoluto. ¿Puede pensarse que la segunda fase hubiera existido sin la primera? La hipótesis de las fuerzas centrales contenía todos los principios, y los involucraba como consecuencias necesarias: involucraba tanto la conservación de la energía como la de la masa, y la igualdad de acción y reacción, y la ley de acción mínima que aparecían, es verdad, no como verdades experimentales, sino como teoremas, cuya enunciación tuvo, al mismo tiempo, algo más preciso y menos general que bajo la forma actual.

Es la física matemática de nuestros padres la que nos ha permitido familiarizarnos, poco a poco, con estos diversos principios, la que nos ha habituado a reconocerlos bajo las distintas vestimentas en las que se han disfrazado. Tales principios han sido comparados con los datos de nuestra experiencia, y se ha visto la necesidad de modificar su enunciación para adaptarlos a estos datos; de este modo, han sido extendidos y consolidados. Así llegaron a ser considerados como verdades experimentales, y la concepción de las fuerzas centrales se convirtió en un sostén inútil, o más bien en un desconcierto, porque hacía a los principios partícipes de su carácter hipotético.

Los marcos, por tanto, no se han roto, debido a que son elásticos, sino que se han ampliado. Nuestros padres, que los establecieron, no trabajaron en vano, y reconocemos, en la ciencia de hoy, los rasgos generales del bosquejo que trazaron.

CAPÍTULO VIII

LA CRISIS ACTUAL DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

La nueva crisis. ¿Estamos a punto de entrar en un tercer periodo? ¿Estamos en la víspera de una segunda crisis? ¿Están a punto de desmoronarse los principios sobre los que hemos basado todo? Estas han sido, desde hace tiempo, preguntas pertinentes.

Cuando uno habla así, inmediatamente se piensa en el radio, aquel gran revolucionario de los tiempos presentes (y del que luego me ocuparé); pero hay algo más. No es sólo la conservación de la energía la que está en duda, sino que todos los otros principios están igualmente en peligro, tal como veremos a continuación.

El principio de Carnot. Comencemos con el principio de Carnot. Este es el único [principio] que no se presenta a sí mismo como una consecuencia inmediata de la hipótesis de fuerzas centrales. Más aún, parece ser que, si bien no contradice directamente tal hipótesis, no se reconcilia con ella fácilmente. Si los fenómenos físicos se debieran exclusivamente a los movimientos de los átomos cuya atracción mutua dependiese sólo de la distancia, parecería que todos estos fenómenos deben ser reversibles; si todas las velocidades iniciales fuesen reversibles, estos átomos - siempre sujetos a las mismas fuerzas - deberían recorrer sus trayectorias en el sentido contrario, tal como la Tierra describiría, en el sentido retrógrada, esta misma órbita elíptica que describe en el sentido directo si las condiciones iniciales de su movimiento hubiesen sido invertidas. Por esta razón, si un fenómeno físico es posible, el fenómeno inverso debe igualmente serlo, y uno debería ser capaz de remontar el curso del tiempo. Ahora bien, esto no sucede en la naturaleza, y es precisamente lo que nos enseña el principio de Carnot: el calor puede pasar de un cuerpo caliente a uno frío, pero después es imposible hacer que tome la ruta inversa y reestablecer las diferencias de temperatura que han sido eliminadas. El movimiento puede ser totalmente disipado y transformado en calor a través de la fricción, pero la transformación contrario nunca puede realizarse excepto parcialmente.

Nos hemos esforzado por reconciliar esta aparente contradicción. Si el mundo tiende hacia la uniformidad, no es porque sus partes fundamentales, desemejantes al principio, tiendan a volverse menos y menos distintas; más bien es porque, desplazándose al azar, terminan por mezclarse. Para un ojo que distinga todos los elementos, la variedad siempre sería igual de grande; cada grano de esta tierra preserva su originalidad y no toma la forma de sus vecinos, pero como la mezcla se vuelve cada vez más íntima, nuestros toscos sentidos perciben únicamente la uniformidad. Es por esto que, por ejemplo, las temperaturas tienden a un nivel sin la posibilidad de ir hacia atrás.

Si una gota de vino cae sobre un vaso de agua, sea cual sea la ley de movimiento interno del líquido, pronto veríamos que se tiñe de un tinte rosado uniforme, y no importa, a partir de este momento, cuánto agite uno tal vaso, el vino y el agua no parecen capaces de separarse de nuevo. Aquí tenemos el tipo de fenómeno físico irreversible: ocultar un grano de cebada en un montón de trigo es fácil, pero encontrarlo después y sacarlo es prácticamente imposible. Todo esto lo han explicado Maxwell y Boltzmann, pero el que parece haberlo visto más claro, en un libro poco leído debido a su dificultad, es Gibbs, en sus *Principios elementales de mecánica estadística*.

Para aquellos que adoptan este punto de vista, el principio de Carnot es solamente un principio imperfecto, una especie de concesión a la flaqueza de nuestros sentidos. Es debido a que nuestros ojos son muy toscos que no podemos distinguir los elementos de la mezcla, y es porque nuestras manos son muy toscas que no podemos forzarlas a separar. El demonio imaginario de Maxwell, capaz de ordenar las moléculas una por una, bien podría obligar al mundo a que vuelva hacia atrás. ¿Puede volver por sí mismo? No es imposible, solamente es infinitamente improbable. Las posibilidades son tales que debemos esperar un largo tiempo para el concurso de circunstancias que permitan tal retrogradación, pero tarde o temprano ocurrirán, después de años cuyo número tomaría millones de páginas en escribirse. Estas reservas, no obstante, permanecieron en el campo de lo teórico (al no ser demasiado inquietantes), y el principio de Carnot mantuvo todo su valor principal. Pero aquí cambia el panorama. El biólogo, armado con su microscopio, hace tiempo notó movimientos irregulares de pequeñas partículas en suspensión (tal es el movimiento browniano). Primero pensó que esto era un fenómeno vital, pero pronto vio que los cuerpos inanimados danzaban con no menos ardor que los otros, y entonces turnó la materia a los físicos. Desafortunadamente, los físicos permanecieron, por mucho tiempo, desinteresados en

esta cuestión. Uno concentra la luz para iluminar el preparado del microscopio, pensaron, con la luz hay calor, y de ahí las desigualdades de temperatura y las corrientes en el líquido interior que producen los movimientos referidos.

Se le ocurrió al señor Gouy ver más de cerca, y observó - o pensó observar - que esta explicación es insostenible, que los movimientos se vuelven más enérgicos a medida que las partículas son más pequeñas, pero que no están influidos por modo alguno de iluminación. Si entonces estos movimientos nunca cesan, o mejor dicho renacen sin cesar, sin tomar nada prestado de fuente externa de energía alguna, ¿qué debemos pensar? Para estar seguros, no debemos, por este motivo, renunciar a nuestra creencia en la conservación de la energía, aunque ahora vemos bajo nuestros ojos movimiento transformado en calor por la fricción, e inversamente calor transformado en movimiento, y todo esto sin pérdida alguna ya que el movimiento dura por siempre. Lo anterior es contrario al principio de Carnot. Si es así, para ver al mundo volver hacia atrás ya no necesitaremos de la perspicacia del demonio de Maxwell; nuestro microscopio será suficiente. Cuerpos muy grandes, como por ejemplo aquellos que miden una décima parte de un milímetro, son golpeados por todos lados por átomos en movimiento, pero ellos [los cuerpos] no se mueven porque estos golpes son muy numerosos y la ley del azar hace que se compensen unos con otros; pero las partículas más pequeñas reciben muy pocos golpes como para que tenga lugar esta compensación con certeza e incesantemente se ven zarandeados. He aquí uno de nuestros principios en peligro.

El principio de la relatividad. Pasemos al principio de la relatividad: éste no solamente es confirmado por nuestra experiencia diaria, no solamente es una consecuencia necesaria de la hipótesis de fuerzas centrales, sino que está irresistiblemente impuesto sobre nuestro juicio, y aún así es atacado. Consideremos dos cuerpos electrificados. Aunque a nosotros nos parecen en reposo, ambos son *llevados*[‡‡‡] por el movimiento de la Tierra. Una carga eléctrica en movimiento, tal como Rowland nos ha enseñado, es equivalente a una corriente. Estos dos cuerpos cargados son, por tanto, equivalentes a dos corrientes paralelas del mismo sentido y ambas deben atraerse una con otra. Al medir esta atracción, debemos medir la velocidad de la Tierra, y no su velocidad en relación con el Sol o en las estrellas fijas, sino su velocidad absoluta.

---

‡‡‡ Las cursivas son mías. Nota del Traductor.

Sé muy bien que se responderá: no es su velocidad absoluta la que es medida, es su velocidad en relación con el éter. ¡Qué insatisfactorio resulta lo anterior! ¿No es evidente que, del principio así entendido, ya no podemos inferir nada? Ya no podría decírsenos nada justamente porque ya no se tendría miedo a contradicción alguna. Si tenemos éxito al medir cualquier cosa, siempre tendremos la libertad para decir que esta no es la velocidad absoluta, y si no es la velocidad en relación con el éter, siempre podrá ser la velocidad en relación con algún nuevo fluido desconocido con el que podamos llenar el espacio.

En realidad, el experimento ha asumido la responsabilidad de arruinar esta interpretación sobre el principio de la relatividad. Todos los intentos para medir la velocidad de la Tierra en relación con el éter han llevado a resultados negativos. Esta vez, la física experimental ha sido más fiel al principio que la física matemática. Los teóricos, para poner en armonía otras de sus observaciones generales, han evitado tal principio, pero los físicos experimentales se han obstinado en confirmarlo. Los medios han variado, y finalmente Michelson llevó la precisión a sus últimos límites: nada surgió de eso. Es precisamente para explicar esta obstinación que los matemáticos se ven forzados a emplear toda su ingenuidad.

Su tarea no fue nada fácil, y si Lorentz pudo sortearla fue únicamente a partir de la acumulación de hipótesis.

La idea más ingeniosa fue la del tiempo local. Imaginemos dos observadores que desean ajustar sus relojes a partir de señales ópticas. Entre ellos intercambian señales, pero como saben que la transmisión de la luz no es instantánea, son cuidadosos al intercambiar tales señales. Cuando la estación *B* percibe la señal de la estación *A*, su reloj no debe marcar la misma hora que la de la estación *A* al momento de mandar la señal, sino esta hora aumentada por una constante que represente la duración de la transmisión. Supongamos, por ejemplo, que la estación *A* manda su señal cuando su reloj marca la hora *O*, y la estación *B* la percibe cuando su reloj marca la hora *t*. Los relojes estarán ajustados si el intervalo igual a *t* representa la duración de la transmisión, y para verificarlo, la estación *B* manda, a su vez, una señal cuando su reloj marque *O*, y entonces la estación *A* debe percibirla cuando su reloj marque *t*. Los relojes estarán, pues, ajustados.

Y en realidad marcan la misma hora en el mismo instante físico bajo la siguiente condición: las dos estaciones deben estar fijas. De otra forma, la duración de la transmisión no será la misma en ambos sentidos, ya que la estación *A*, por ejemplo, se

mueve hacia delante para encontrarse con la perturbación óptica que emana de *B*, mientras que la estación *B* huye de la perturbación que emana de *A*. Los relojes ajustados de esta forma no marcarán, por tanto, el tiempo real, sino que marcarán lo que puede llamarse el *tiempo local*, de modo que uno de ellos ganará terreno sobre el otro. Pero esto importa poco, porque carecemos de medio alguno para percibirlo. Todos los fenómenos que suceden en *A*, por ejemplo, serán tardíos, pero todos lo serán igualmente, y el observador no lo percibirá ya que su reloj es lento. De tal suerte que, aunque el principio de la relatividad sí lo tendría, él carecería de medio alguno para saber si se encuentra en reposo o en movimiento absoluto.

Desafortunadamente, lo anterior no es suficiente, y son necesarias hipótesis complementarias. Es necesario admitir que los cuerpos en movimiento experimentan una contracción uniforme en el sentido del movimiento. Uno de los diámetros de la Tierra, por ejemplo, está reducido por un doscientos millonésimo en consecuencia del movimiento de nuestro planeta, mientras que el otro diámetro mantiene su longitud normal. Así, están compensadas las últimas pequeñas diferencias. Y después queda aún la hipótesis sobre las fuerzas. Las fuerzas, sea cual sea su origen, tanto la gravedad como la elasticidad, se reducirían en una cierta proporción en un mundo animado por una translación uniforme o, mejor dicho, esto sucedería a los componentes perpendiculares a la translación; los componentes paralelos no cambiarían. Resumamos, entonces, nuestro ejemplo sobre los dos cuerpos electrificados: estos cuerpos se repelen uno a otro, pero, al mismo tiempo y si todo fuese llevado en una translación uniforme, ambos cuerpos son equivalentes a dos corrientes paralelas del mismo sentido que se atraen una a otra. Esta atracción electrodinámica disminuye, por tanto, la repulsión electrostática, y la repulsión total es más débil a la que sería si los dos cuerpos estuviesen en reposo. Pero como para medir esta repulsión debemos balancearla con otra fuerza, y todas estas fuerzas están reducidas en la misma proporción, no percibimos nada. De esta forma, todo parece estar arreglado, ¿pero es suficiente para disipar las dudas? ¿Qué pasaría si uno pudiese comunicarse por señales no luminosas cuya velocidad de propagación difiriese de aquella de la luz? Si, después de haber ajustado los relojes a partir del procedimiento óptico, quisiésemos verificar el ajuste con la ayuda de estas nuevas señales, observaríamos discrepancias que harían evidente la translación común de las dos estaciones. ¿Y son tales señales inconcebibles, si admitimos, junto con Laplace, que la gravitación universal es transmitida un millón de veces más rápido que la luz?

Así, el principio de la relatividad ha sido valientemente defendido en estos últimos tiempos, pero la misma energía de su defensa prueba qué tan serio era el ataque.

El principio de Newton. Hablemos ahora del principio de Newton, a saber, de la igualdad de acción y reacción. Este principio está íntimamente ligado con el principio precedente, y en realidad parece que la caída de uno implicaría la caída del otro. Así pues, no debe asombrarnos encontrar aquí las mismas dificultades.

Los fenómenos eléctricos, de acuerdo con la teoría de Lorentz, se deben a los desplazamientos de pequeñas partículas cargadas, llamadas electrones, inmersas en el medio que llamamos éter. Los movimientos de estos electrones producen perturbaciones en el éter contiguo; estas perturbaciones se propagan en cada dirección según la velocidad de la luz y, a su vez, otros electrones, originalmente en reposo, son hechos vibrar cuando la perturbación alcanza las partes del éter que los toca. Los electrones, por consiguiente, actúan uno sobre otro, pero esta acción no es directa, sino que se logra mediante el éter. Bajo estas condiciones, ¿puede haber compensación alguna entre la acción y la reacción, por lo menos para un observador que únicamente tome en cuenta los movimientos de la materia, es decir, de los electrones, e ignore aquellos [movimientos] del éter que no puede ver? Evidentemente no. Incluso si la compensación fuese exacta, no podría ser simultánea. La perturbación se propaga a una velocidad finita y alcanza, por lo tanto, al segundo electrón solamente cuando el primero haya ya entrado en reposo. Este segundo electrón experimentará entonces, después de un retraso, la acción del primero, pero ciertamente no reaccionará sobre él en tal momento, ya que alrededor del primero electrón nada se mueve ya.

El análisis de los hechos nos permite ser incluso más precisos. Imaginemos, por ejemplo, un oscilador hertziano, como aquellos utilizados en la telegrafía sin cables. Tal oscilador envía energía en cada dirección, pero podemos proveerlo de un espejo parabólico, tal como Hertz hizo con sus osciladores más pequeños, para que envíe toda la energía producida en una sola dirección. De acuerdo con la teoría, ¿qué sucede entonces? El aparato retrocede, tal como si fuese un cañón y la energía proyectada una bala, y esto es contrario al principio de Newton, porque aquí nuestro proyectil carece de masa; no es, pues, materia, sino energía. El caso es el mismo si utilizamos un faro de luz provisto de un reflector, ya que la luz no es nada sino una perturbación del campo electromagnético. Este faro de luz retrocedería como si la luz que envía fuese un proyectil. ¿Cuál es la fuerza que produciría este retroceso? Es lo que se llama la presión

de Maxwell-Bartholi. Es sumamente diminuta, y ha sido difícil ponerla en evidencia incluso con los radiómetros más sensibles, pero es suficiente con que exista.

Si toda la energía emitida por nuestro oscilador cayese sobre un receptor, éste actuaría como si hubiese recibido un coche mecánico que representaría, en cierto sentido, la compensación del retroceso del oscilador. La reacción sería igual a la acción, pero no sería simultánea: el receptor se movería, pero no en el momento en el que el receptor retrocede. Si la energía se propaga indefinidamente sin encontrar receptor alguno, la compensación nunca tendría lugar.

¿Debemos decir que el espacio que separa al oscilador del receptor y por el cual debe pasar la perturbación al ir del uno al otro no está vacío, que está lleno no solamente de éter, sino de aire o, incluso en los espacios interplanetarios, de algún fluido sutil pero aún así ponderable, debemos decir, pues, que esta materia experimenta el choque tal como el receptor en el momento cuando la energía la alcanza, y retrocede a su vez cuando la perturbación la deja? Esto salvaría al principio de Newton, pero no resulta cierto. Si la energía - en su difusión - permaneciese siempre unida a algún sustrato material, entonces la materia en movimiento llevaría luz con ella, y Fizeau ha demostrado que tal no es el caso, por lo menos para el aire, y Michelson y Morley desde entonces lo han confirmado. Podría igualmente suponerse que los movimientos de la propia materia son exactamente compensados por aquellos del éter, pero hacerlo nos llevaría a las mismas reflexiones anteriores. El principio así entendido explicaría todo ya que, sean cuales sean los movimientos visibles, siempre podríamos imaginar movimientos hipotéticos que los compensasen. Pero si es capaz de explicar todo, es porque no nos permite prever nada: no nos permite decidir entre las distintas hipótesis posibles, ya que explica todo de antemano, y se vuelve, por tanto, inútil.

Y entonces las suposiciones que sería necesario hacer sobre los movimientos del éter no serían muy satisfactorias. Si las cargas eléctricas se duplican, sería natural imaginar que las velocidades de los diversos átomos del éter también se duplican, y para que la compensación fuese posible, sería necesario que la velocidad media del éter se cuadruplique.

Es por esto que desde hace tiempo he pensado que estas consecuencias de la teoría, contrarias al principio de Newton, terminarían algún día por ser abandonadas. Pero los recientes experimentos sobre los movimientos de los electrones emitidos del radio parecen más bien confirmarlas.

El principio de Lavoisier. Llegamos al principio de Lavoisier sobre la conservación de la masa. Ciertamente, este es un principio que no puede tocarse sin inquietar toda la mecánica. Y ahora ciertas personas piensan que nos parece verdadero solamente porque en la mecánica se consideran velocidades meramente moderadas, pero que cesaría de ser cierto para cuerpos animados por velocidades comparables a la de la luz. Ahora se han alcanzado, por lo menos así se cree, tales velocidades. Los rayos catódicos o aquellos del radio pueden formarse por partículas muy diminutas o por electrones desplazados a velocidades menores, sin duda, a la de la luz, pero que pueden ser un décimo o un tercio de ella.

Estos rayos pueden ser desviados, ya sea por un campo eléctrico, o por un campo magnético, y somos capaces, al comparar tales desviaciones, de medir - al mismo tiempo - la velocidad de los electrones y su masa (o más bien la relación de su masa con su carga). Pero cuando se observó que estas velocidades se aproximaban a la de la luz, se decidió que era necesaria una corrección. Estas moléculas, estando electrificadas, no podían desplazarse sin agitar al éter, y para ponerlas en movimiento es necesario superar una inercia doble, aquella de la molécula por sí misma, y aquella del éter. La masa total o aparente que uno mide está compuesta, entonces, de dos partes: la masa real o mecánica de la molécula y la masa electrodinámica representando la inercia del éter.

Los cálculos de Abraham y los experimentos de Kaufmann han mostrado que la masa mecánica, propiamente dicha, es nula, y que la masa de los electrones, o por lo menos de los electrones negativos, tiene un origen exclusivamente electrodinámico. Esto nos obliga a cambiar la definición de masa: ya no podemos distinguir la masa mecánica de la masa electrodinámica, ya que entonces la primera desaparecería: no hay otra masa que la inercia electrodinámica. Pero en este caso la masa ya no puede ser constante, sino que aumenta con la velocidad, e incluso depende de la dirección. Un cuerpo animado por una velocidad notable no opondrá la misma inercia a las fuerzas que tiendan a desviarlo de su ruta, como a aquellas que tiendan a acelerar o a retrasar su progreso.

Aún queda un recurso: los elementos últimos de los cuerpos son electrones, algunos cargados negativamente, otros cargados positivamente. Los electrones negativos carecen de masa, esto se entiende, pero los electrones positivos, por lo poco que sabemos de ellos, parecen ser mucho más grandes. Quizá poseen, además de su masa electrodinámica, una verdadera masa mecánica. La masa real de un cuerpo sería,

por tanto, la suma de las masas mecánicas de sus electrones positivos, no contando los electrones negativos. La masa, así definida, aún sería constante.

¡Ay! Este recurso también nos evade. Recordemos lo que hemos dicho sobre el principio de la relatividad y de los esfuerzos hechos para salvarlo. Y no es solamente cuestión de salvar un principio, sino los indudables resultados de los experimentos de Michelson.

Pues bien, como hemos visto antes, Lorentz, para explicar estos resultados, se vio obligado a suponer que todas las fuerzas, sin importar su origen, se reducían en la misma proporción en un medio animado por una translación uniforme. Esto no es suficiente: no es suficiente con esto tenga lugar para las fuerzas reales, también debe ser lo mismo para las fuerzas de la inercia. Es necesario, por tanto y tal como dice Lorentz, que *las masas de todas las partículas estén influidas por una translación al mismo grado que las masas electromagnéticas de los electrones*.

De tal suerte que las masas mecánicas deben variar en concordancia con las mismas leyes que las masas electrodinámicas y no pueden, por lo tanto, ser constantes.

¿Necesito hacer notar que la caída del principio de Lavoisier implica la caída del de Newton? Esto último significa que el centro de gravedad de un sistema aislado se mueve en una línea recta; pero si ya no hay una masa constante, ya no hay un centro de gravedad: ya ni siquiera sabemos qué es eso. Es por esto que arriba dije que los experimentos sobre los rayos catódicos parecerían justificar las dudas de Lorentz concernientes al principio newtoniano.

De todos estos resultados - si fuesen confirmados - surgiría una mecánica completamente nueva que estaría, sobre todo, caracterizada por este hecho: ninguna velocidad puede superar a la de la luz[§§§], así como ninguna temperatura puede caer por debajo del cero absoluto.

Para un observador arrastrado en una translación de la que no sospecha, ya no habría velocidad aparente alguna que supere a la de la luz. Y esto sería una contradicción si no recordamos que este observador no usaría los mismos relojes que un observador fijo, sino, en realidad, relojes marcando un “tiempo local”.

Aquí nos encontramos con una cuestión que me contento con plantear. Si ya no hay masa alguna, ¿qué sucede con la ley de Newton? La masa tiene dos aspectos: es, al mismo tiempo, un coeficiente de la inercia y una masa atrayente entrando, como factor,

---

[§§§] Porque los cuerpos opondrían una inercia creciente a las causas que tienden a acelerar su movimiento, y esta inercia sería infinita si se alcanzase la velocidad de la luz.

en la atracción newtoniana. Si el coeficiente de la inercia no es constante, ¿puede serlo la masa atrayente? Tal es la cuestión.

El principio de Mayer. Por lo menos nos quedaba el principio de la conservación de la energía, y éste parecía ser más sólido. ¿Debo recodar cómo fue, a su vez, desacreditado? Este evento ha hecho más ruido que el precedente, y se encuentra en las memorias de todos. De los primeros trabajos de Becquerel y, sobre todo, cuando los Curies descubrieron el radio, se observó que cada cuerpo radioactivo era una fuente inexhaustible de radiación. Su actividad parecía subsistir sin alteración alguna a lo largo de meses y años. Este era el tenor de los principios: estas radiaciones eran, en realidad, energía, y del mismo pedazo de radio ésta era emitida y era emitida por siempre. Pero estas cantidades de energía eran demasiado pequeñas como para ser medidas; por lo menos tal era la creencia y no nos encontrábamos muy turbados con eso.

La escena cambió cuando Curie acordó poner al radio en un calorímetro: se vio entonces que la cantidad de calor incesantemente creado era muy notable.

Fueron numerosas las explicaciones propuestas, pero en este caso no podemos decir que entre más, mejor. En tanto que ninguna de ellas haya prevalecido sobre las otras, no podemos estar seguros si una es la mejor. Desde hace algún tiempo, no obstante, una de aquellas explicaciones parece haber alzado la mano y razonablemente podemos esperar que tengamos la llave del misterio.

El señor W. Ramsay se ha esforzado en mostrar que el radio se encuentra en proceso de transformación, y que contiene una reserva de energía enorme pero no inexhaustible. La transformación del radio produciría entonces un millón de veces más calor que todas las transformaciones conocidas. El radio se desgastará en unos 1,250 años. Esto, como se ve, es muy poco tiempo, y estamos seguros, por lo menos, de haber resuelto este punto por algunos cientos de años. Pero mientras esperamos, permanecen nuestras dudas.

CAPÍTULO IX

EL FUTURO DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Los principios y el experimento. En medio de tanta ruina, ¿qué nos queda? El principio de acción mínima está hasta ahora intacto, y Larmor parece creer que así permanecerá. Pero, en realidad, es aún más vago y más general.

Ante la presencia de este colapso general de principios, ¿qué actitud tomará la física matemática? Y antes que nada, antes que tanta agitación, es conveniente preguntar si todo eso es cierto. Todas estas derogaciones a los principios se encuentran únicamente entre lo infinitesimal: ahí, el microscopio es necesario para observar el movimiento browniano; los electrones son muy claros, el radio es muy raro, y nadie nunca ha tenido más que unos pocos miligramos de él. Y entonces puede preguntarse uno si, además del visto infinitesimal, no habría otro no visto infinitesimal contrapuesto al primero.

De tal suerte que hay una cuestión interlocutoria, y parece ser que sólo el experimento puede resolverla. Debemos, por tanto, ceder paso a los experimentadores y, mientras esperamos a que decidan el debate, dejar de preocuparnos por estos desconcertantes problemas, y tranquilamente continuar trabajando tal como si los principios nunca hubiesen sido puestos en duda. Ciertamente, tenemos mucho que hacer ahí en donde tales principios pueden aplicarse con toda seguridad: tenemos mucho en qué emplear nuestra actividad durante este periodo de incertidumbre.

El papel del analista. Y en cuanto a estas dudas, ¿es en realidad cierto que no podemos hacer nada para librar a la ciencia de ellas? En efecto, hay que decir que no ha sido solamente la física experimental la que ha dado paso a tales dudas; la física matemática también ha contribuido. Son los experimentadores los que han observado al radio expulsar energía, pero son los teóricos los que han puesto en evidencia todas las dificultades surgidas por la propagación de luz a través de un medio en movimiento, aunque es probable que no seamos conscientes del papel de estos últimos. Pues bien, si

fueron ellos los que han hecho tanto para ponernos en esta encrucijada, es propio que sean ellos mismos los que nos ayuden a salir de ella.

Su labor es someter a un examen crítico todas estas nuevas perspectivas que he delineado, y abandonar los principios solamente después de haber hecho un esfuerzo noble por salvarlos. En este sentido, ¿qué es lo que pueden hacer? Esto es lo que intentaré explicar.

Se trata de una cuestión, ante todo, de esforzarse en obtener una teoría más satisfactoria de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. Es especialmente ahí, como suficientemente lo he mostrado antes, donde se acumulan las dificultades. Es inútil amontonar hipótesis, porque no podemos satisfacer todos los principios a la vez. Hasta ahora, se ha tenido éxito en salvaguardar algunos [principios] solamente bajo la condición de sacrificar otros; no obstante, toda esperanza en obtener mejores resultados no está aún perdida. Tomemos entonces la teoría de Lorentz, transformémosla en todos los sentidos, modifiquémosla poco a poco, y quizá todo se acomode por sí mismo.

Así, en lugar de suponer que los cuerpos en movimiento experimentan una contracción en el sentido de tal movimiento, y que esta contracción es la misma sin importar cuál sea la naturaleza de estos cuerpos y de las fuerzas a las que por otra parte están sujetos, ¿no podríamos hacer una hipótesis más simple y natural? Podríamos imaginar, por ejemplo, que es el éter el que se modifica cuando está en un movimiento relativo en referencia al medio material que lo penetra y que, cuando se ve así modificado, ya no transmite perturbaciones a la misma velocidad en cada dirección. Podría transmitir más rápido aquellas que se propagan paralelamente al movimiento del medio, ya sea en el mismo sentido o en el sentido opuesto, y más lento aquellas propagadas perpendicularmente. Las superficies ondulares ya no serían esferas, sino elipsoides, y podríamos prescindir entonces de la extraordinaria contracción de todos los cuerpos.

Cito lo anterior sólo como un ejemplo, ya que las modificaciones que pueden ensayarse serían evidentemente susceptibles a infinitas variaciones.

Aberración y astronomía. Es posible también que algún día la astronomía pueda facilitarnos datos sobre este punto. De ella surgió, principalmente, la cuestión al habernos familiarizado con el fenómeno de la aberración de la luz. Si elaboramos crudamente la teoría de la aberración, llegamos a un resultado muy curioso. Las posiciones aparentes de las estrellas difieren de sus posiciones reales debido al

movimiento de la Tierra, y como este movimiento es variable, también lo son estas posiciones aparentes. La posición real no puede comprobarse, pero podemos observar las variaciones de la posición aparente. Las observaciones de la aberración nos muestran, por tanto, no el movimiento terrestre, sino las variaciones de este movimiento; no pueden, entonces, darnos información acerca del movimiento absoluto de la Tierra.

Por lo menos esto es cierto en una primera aproximación, pero el caso ya no sería el mismo si pudiésemos apreciar las milésimas de un segundo. Entonces se vería que la amplitud de la oscilación depende no sólo de la variación del movimiento, una variación bien conocida ya que es el movimiento de nuestro globo sobre su órbita elíptica, sino del valor medio de este movimiento, de tal forma que la constante de aberración no sería exactamente la misma para todas las estrellas, y las diferencias nos dirían cuál es el movimiento absoluto de la Tierra en el espacio.

Esto supondría entonces, bajo otra forma, la ruina del principio de la relatividad. Estamos lejos, es cierto, de apreciar la milésima de un segundo, pero, después de todo - diría algunos - la velocidad total absoluta de la Tierra es quizá mucho mayor que su velocidad relativa con respecto al Sol. Si, por ejemplo, fuese de 300 kilómetros por segundo en lugar de 30, esto sería suficiente para hacer observable al fenómeno.

Creo que, al razonar así, uno admite una teoría muy simple de la aberración. Michelson nos ha mostrado, tal como ya dije, que los procedimientos físicos son incapaces de poner en evidencia al movimiento absoluto. Estoy convencido de que lo mismo será cierto para los procedimientos astronómicos, sin importar qué tan precisos puedan llegar a ser.

Sea como fuere, los datos a este respecto provistos por la astronomía serán, algún día, preciosos para los físicos. Mientras tanto, creo que los teóricos, recordando su experiencia con Michelson, pueden anticipar un resultado negativo, y harían un trabajo útil al construir una teoría de la aberración que explique esto por adelantado.

Electrones y espectros. Estas dinámicas de los electrones pueden abordarse desde muchos lados, pero entre los caminos que llevan a ellas hay uno que ha sido un tanto descuidado, aún cuando sea un camino que promete la mayor cantidad de sorpresas. Son los movimientos de los electrones los que producen las líneas de los espectros de emisión, y esto ha sido probado por el efecto de Zeeman. En un cuerpo incandescente, lo que vibra es sensible al imán y está, por tanto, electrificado. Este es un primer punto

muy importante, pero nadie ha ido más lejos. ¿Por qué las líneas del espectro están distribuidas en concordancia con una ley regular? Estas leyes han sido estudiadas por los experimentadores en sus más mínimos detalles, y resultaron ser muy precisas y comparativamente simples. Un primer estudio de estas distribuciones hace recordar ala armonía encontrada en la acústica, aunque la diferencia es grande. No sólo no son los números de las vibraciones los múltiplos sucesivos de un único número, sino que ni siquiera podemos encontrar cualquier cosa análoga a las raíces de aquellas ecuaciones trascendentales a las que llegamos a partir de tantos problemas de la física matemática: la [ecuación] de las vibraciones de un cuerpo elástico de cualquier forma, la de las oscilaciones hertzianas en un generador de cualquier forma, el problema de Fourier para el enfriamiento de un cuerpo sólido.

Las leyes son más simples, pero son de una naturaleza completamente distinta, y para citar sólo una de estas diferencias, basta decir lo siguiente: para las armonías de alto orden, el número de vibraciones tiende hacia un límite finito, en lugar de incrementarse indefinidamente.

Lo anterior no ha sido aún representado, y creo que ahí se encuentra uno de los secretos más importantes de la naturaleza. Un físico japonés, el señor Nagaoka, recientemente ha propuesto una explicación. De acuerdo con él, los átomos están compuestos por un gran electrón positivo rodeado por un anillo formado por un gran número de electrones negativos muy pequeños. Tal es la forma del planeta Saturno con sus anillos. Este es un intento muy interesante, pero no totalmente satisfactorio, y tendrá que ser renovado. Penetraríamos, por así decirlo, en el escondrijo más íntimo de la materia. Y desde el punto de vista particular que hoy nos ocupa, cuando sabemos por qué las vibraciones de los cuerpos incandescentes difieren de las vibraciones elásticas ordinarias, y por qué los electrones no se comportan como la materia con la que estamos familiarizados, comprenderemos mejor la dinámica de los electrones y quizá nos será más fácil reconciliarla con los principios.

Convenciones precediendo al experimento. Ahora supongamos que todos estos esfuerzos fracasan (cosa que por cierto no creo). ¿Qué debe entonces hacerse? ¿Será necesario buscar reparar a los principios rotos al darles lo que nosotros los franceses

llamamos un *coup de pouce*[****]? Evidentemente, lo anterior siempre es posible, y no me retracto de nada de lo que he dicho.

¿Pero no había escrito usted - podría decírseme si se buscara una riña conmigo - que los principios, aun de origen experimental, resultan inatacables por parte del experimento porque se han vuelto convenciones? Y ahora usted nos dice que las conquistas más recientes de la experimentación ponen estos principios en peligro.

Pues bien, antes estaba en lo correcto y hoy no estoy equivocado. Antes estaba en lo cierto, y lo que está sucediendo ahora es una nueva prueba de ello. Tomemos, por ejemplo, el experimento calorimétrico de Curie hecho sobre el radio. ¿Es posible reconciliarlo con el principio de la conservación de la energía? Se ha intentado hacerlo de muchas formas, pero hay, entre tales caminos, uno que me gustaría hacer notar. Esta no es la explicación que hoy en día tiende a prevalecer, pero es una de tantas que han sido propuestas. Se ha conjeturado que el radio era sólo un intermediario, que solamente almacenaba radiaciones de una naturaleza desconocida que pasó por el espacio en cada dirección, atravesando todos los cuerpos, salvo el radio, sin que éstos se alterasen por este paso y sin que se ejerciese acción alguna sobre ellos. El radio, por sí solo, tomó de tales radiaciones un poco de su energía y, después, nos la dio en varias formas.

¡Qué explicación tan ventajosa y conveniente! Antes que nada, tal explicación no es verificable y, por tanto, es irrefutable. Después servirá para considerar cualquier derogación del principio de Mayer, y responde, de antemano, no sólo la objeción de Curie, sino todas las objeciones que futuros experimentadores pudieran hacer. Esta nueva y desconocida energía serviría para todo.

Esto es justo lo que dije, y con eso se muestra que nuestro principio está a salvo del experimento.

Pero, ¿qué hemos ganado con esta jugada? El principio está intacto, ¿pero entonces qué uso tiene? Nos permitió prever que en tal o cual circunstancia podemos contar con tal cantidad total de energía. En un principio nos limitó, es cierto, pero ahora que está puesta a nuestra disposición esta provisión indefinida de nueva energía, ya no tenemos límite alguno. Y además, como he dicho en *Ciencia e Hipótesis*, si un principio cesa de ser fecundo, un experimento que no lo contradiga directamente nunca lo podrá condenar.

[****] Impulso. Nota del Traductor.

La física matemática futura. Esto, pues, no es lo que debería hacerse; sería necesario reconstruir nuevamente. Si estuviéramos condenados por esta necesidad, no podríamos más que consolarnos. No sería necesario concluir entonces que la ciencia sólo puede elaborar un tejido de Penélope, que sólo puede levantar estructuras efímeras, y que pronto se ve forzada a demolerlas con sus propias manos.

Como he dicho antes, ya hemos pasado por una crisis similar. He mostrado que, en la segunda física matemática, aquella de los principios, encontramos rasgos de la primera, aquella de las fuerzas centrales. Sería justamente lo mismo si tuviésemos que conocer una tercera. Tal como el animal que se despoja de su antiguo y estrecho caparazón y se hace a sí mismo uno nuevo, bajo el cual uno reconoce los rasgos esenciales del organismo que ha persistido.

No podemos prever de qué forma estamos a punto de expandirnos, pero quizá sea la teoría cinética de los gases la que experimentará un desarrollo tal que sirva como modelo a otras teorías. Entonces los hechos que en un principio nos parecían tan simples serán meros resultantes de un gran número de hechos elementales que sólo las leyes de la casualidad harán cooperar hacia un fin común. La ley física sumirá, pues, un aspecto totalmente nuevo; ya no será solamente una ecuación diferencial, sino que tomará el carácter de una ley estadística.

Quizá también tengamos que construir una mecánica totalmente nueva de la que solamente tendremos una vislumbre, y en donde, dado que la inercia se incrementa con la velocidad, la velocidad de la luz sería un límite infranqueable. La mecánica ordinaria, más simple, quedaría como una primera aproximación, ya que sería cierta para velocidades no tan grandes, de tal suerte que la vieja dinámica aún se encontraría en la nueva. No debemos lamentar haber creído en estos principios, e incluso hay más: ya que las velocidades demasiado grandes serían, para las viejas fórmulas, solamente excepcionales, el camino más seguro en la práctica sería seguir actuando tal como si continuásemos creyendo en tales principios. Resultan tan útiles que es necesario guardar un lugar para ellos. Determinar excluirlos todos y de una vez por todas sería privarnos de una preciosa herramienta. Me apresuro a decir, como conclusión, que aún no estamos ahí, y hasta ahora nada prueba que los principios no saldrán de tal combate victoriosos e intactos.[††††]

[††††] Estas consideraciones sobre la física matemática están tomadas de mi discurso de St. Louis.

PARTE III

EL VALOR OBJETIVO DE LA CIENCIA

CAPÍTULO X

¿ES LA CIENCIA ARTIFICIAL?

I. La filosofía del señor Le Roy

Hay muchas razones para ser escépticos, ¿pero debemos llevar este escepticismo al límite o debemos detenernos en el camino? Llevarlo al límite es la solución más tentadora, la más fácil, y la que muchos han adoptado, desesperados por salvar lo que sea del naufragio.

Entre los escritos inspirados por esta tendencia es propio poner, en primer lugar, a los del señor Le Roy. Este pensador no es sólo un filósofo y un escritor de gran mérito, sino que posee un profundo conocimiento de las ciencias exactas y físicas, e incluso ha mostrado extraños poderes para la inventiva matemática. Recapitulemos, en unas pocas palabras, su doctrina que, por cierto, ha dado lugar a numerosas discusiones.

La ciencia consiste solamente en convenciones, y a esta circunstancia únicamente obedece su certeza aparente. Los hechos de la ciencia y, *a fortiori*, sus leyes, constituyen el trabajo artificial de los científicos, y la ciencia, por lo tanto, no puede enseñarnos nada acerca de la verdad, sino que sólo puede sernos útil como una regla de acción.

Aquí reconocemos la teoría filosófica conocida por el nombre de nominalismo. No todo es falso en esta teoría, y su legítimo dominio debe dejarse en paz, aunque fuera de éste no debe seguirse más.

Pero esto no es todo: la doctrina del señor Le Roy no solamente es nominalista, sino que posee además otra característica que sin duda debe al señor Bergson: es anti

intelectualista. De acuerdo con el señor Le Roy, el intelecto deforma todo lo que toca, y esto es incluso más cierto para su instrumento necesario: “el discurso”. Solamente hay realidad en nuestras fugitivas y cambiantes impresiones, e incluso esta realidad, cuando es tocada, se desvanece.

Y con todo lo anterior, el señor Le Roy no es un escéptico. Si considera al intelecto como incurablemente impotente es sólo para dar más alcance a las otras fuentes de conocimiento, al corazón, por ejemplo, al sentimiento, al instinto, o a la fe.

No obstante cuán grande es mi estima por el talento del señor Le Roy, sin importar la ingenuidad de su tesis, no puedo aceptarla totalmente. Ciertamente, estoy de acuerdo en muchos puntos con el señor Le Roy, e incluso, para respaldar sus puntos de vista, ha citado varios pasajes de mis escritos que, por ningún motivo, estoy dispuesto a rechazar. Simplemente sucede que me siento obligado a explicar por qué no puedo ir con él hasta el final.

El señor Le Roy a menudo se queja de ser acusado de escepticismo. No puede evitar serlo, aún cuando esta acusación probablemente sea injusta. ¿No están las apariencias en contra de él? Nominalista en doctrina, pero realista de corazón, parece escapar al nominalismo absoluto sólo a partir de un desesperado acto de fe.

El hecho es que la filosofía anti intelectualista, por el simple hecho de rechazar el análisis y el “discurso”, se condena a ser intransmisible, a ser una filosofía esencialmente interna o, por lo menos, a solamente poder transmitir sus negaciones. ¿Qué es de extrañar entonces que, para un observador externo, tal filosofía tome la forma de escepticismo?

En esto yace el punto débil de esta filosofía; si se esfuerza en permanecer fiel a sí misma, su energía se gasta en una negación y en un llanto de entusiasmo. Cada autor puede repetir esta negación y este llanto, puede variar su forma, pero nunca añadirá nada nuevo.

Y, sin embargo, ¿no sería más lógico permanecer callado? Veamos, se han escrito artículos muy largos, y, para eso, fue necesario utilizar palabras. ¿Y en este respecto no se ha sido mucho más “discursivo” y, consecuentemente, se ha estado mucho más lejos de la vida y de la verdad que el animal que simplemente vive sin filosofar? ¿No sería este animal el verdadero filósofo?

Por más que ningún pintor haya hecho un retrato perfecto, ¿debemos concluir que la mejor pintura consiste en no pintar? Cuando un zoólogo disecciona un animal, ciertamente “lo altera”. Y sí, al disecarlo, se condena a nunca conocer todo de tal

animal, pero al no disecarlo, se condena a nunca conocer nada sobre él y, por tanto, a nunca ver nada de él.

Es cierto que en el hombre existen otras fuerzas además de su intelecto, y nunca nadie ha sido tan demente como para negarlo. El primero que llega hace que estas fuerzas actúen o las deja actuar; el filósofo debe *hablar* de tales fuerzas, y para hacerlo, debe conocer lo poco que pueda conocerse de ellas: debe, por tanto, *verlas* actuar. ¿Cómo? ¿Con qué ojos, si no es con su intelecto? El corazón y el instinto pueden guiar, pero no hacer que el intelecto sea inútil; pueden dirigir la mirada, pero no reemplazar al ojo. Se puede conceder que el corazón es el obrero y el intelecto sólo el instrumento. ¿Y es un instrumento del que se pueda prescindir, si no para la acción, por lo menos para filosofar? De ahí que un filósofo realmente anti intelectualista sea imposible. Quizá debamos proclamarnos por la supremacía de la acción, pero siempre será nuestro intelecto el que así lo concluya. Al dar prioridad a la acción, el intelecto conserva la superioridad de la caña pensante, y esta es también una supremacía tal que no debe desdeñarse.

Perdonen estas pequeñas reflexiones y perdonen también su brevedad, y que apenas rozan la cuestión. El proceso del intelectualismo no es el tema que quiero tratar: deseo hablar de ciencia, y sobre ella no hay duda alguna. Por definición, podríamos decir, es intelectualista o no será en absoluto. La cuestión es, precisamente, si lo es.

II. CIENCIA, REGLA DE ACCIÓN

Para el señor Le Roy, la ciencia sólo es una regla de acción. Somos incapaces de conocer todo y no obstante nos ponemos en marcha, actuamos, y a toda costa hemos establecido ciertas reglas. El agregado de estas reglas es precisamente la ciencia.

Es así que el hombre, deseoso de diversión, ha instituido reglas para el juego, como aquellas para el tric-trac[‡‡‡‡], por ejemplo, y que, mejor que la propia ciencia, se basan en el consentimiento universal. Igualmente es así que, incapaces para escoger, pero forzados a hacerlo, arrojamos una moneda sin pies ni cabeza para ganar.

La regla del tric-trac es de hecho una regla de acción tal como lo es la ciencia, ¿pero hay alguien que piense que la comparación es justa y no vea la diferencia? Las reglas del juego son convenciones arbitrarias, y podría ser adoptada la convención

[‡‡‡‡] Juego de azar francés. Nota del Traductor.

contraria, *que en todo caso sería igual de buena*. Por el contario, la ciencia es una regla de acción que resulta, por lo menos, exitosa en general, mientras que la regla contraria no resultaría así.

Si decimos que para hacer hidrógeno debemos ocasionar que un ácido actúe sobre el zinc, estamos formulando una regla que tendrá éxito; pudimos haber dicho que era necesario hacer que cierta cantidad de agua actúe sobre el oro, y también esto último sería una regla, solamente que no exitosa. Si, por tanto, las "recetas" científicas tienen un valor como regla de acción es porque sabemos que tienen éxito, por lo menos generalmente. Pero saber esto es saber algo, y entonces ¿por qué se nos dice que no podemos saber nada?

La ciencia prevé, y es justamente porque prevé que puede resultar útil y servir como una regla de acción. Sé bien que sus predicciones son a menudo contradichas por el evento, y eso muestra que la ciencia es imperfecta. Podría añadir que siempre será así, y estoy seguro que esta es una previsión que, al menos, nunca será contradicha. Pero el científico siempre está menos equivocado que el profeta que predice al azar. Además el progreso, aunque lento, es continuo, de tal suerte que los científicos, entre más resueltos, resultan menos engañados.

También sé bien que el señor Le Roy ha dicho en alguna parte que la ciencia se equivocaba con más frecuencia de lo que uno podría pensar, que los cometas a veces engañan a los astrónomos, y que los científicos, que aparentemente son hombres, no hablan de buena gana de sus fracasos, y que si tuvieran que hacerlo, contarían más derrotas que victorias.

El día que dijo eso, el señor Le Roy se extralimitó. Si la ciencia no tuviese éxito, no podría servir como una regla de acción, si no, ¿de dónde obtendría su valor? ¿Lo obtiene porque la ciencia "se vive", porque la amamos y creemos en ella? Los alquimistas tenían recetas para hacer oro, y amaban tales recetas y creían en ellas, y no obstante son nuestras recetas las buenas, aún cuando nuestra fe sea menos viva, porque son las exitosas.

No hay escape alguno de este dilema: o la ciencia no nos permite prever, y entonces carece de valor como regla de acción, o bien nos permite prever de una manera más o menos imperfecta, y entonces no deja de tener valor como medio para conocer.

Ni siquiera hay que decir que la acción constituye la meta de la ciencia. ¿Debemos entonces condenar los estudios sobre la estrella Sirio bajo el pretexto de que probablemente nunca ejerzamos influencia alguna sobre ella? A mis ojos, por el

contrario, el conocimiento constituye el fin y la acción el medio. Si me felicito sobre el desarrollo industrial no es sólo porque provee de un fácil argumento a los defensores de la ciencia, sino, sobre todo, porque provee al científico de fe en sí mismo y también porque ofrece un inmenso campo de experiencia donde chocan dos fuerzas demasiado grandes como para interferir. Sin este lastre, quién sabe si no abandonaría la Tierra, seducido por el espejismo de alguna novedad escolástica, o si no desesperaría creyendo haber forjado únicamente un sueño.

III. EL HECHO CRUDO Y EL HECHO CIENTÍFICO

Lo más paradójico de la tesis del señor Le Roy es su afirmación de que *el científico crea el hecho*. Este fue, al mismo tiempo, su punto esencial y es uno de los más discutidos.

Quizá, dice él (bien creo que esto fue una concesión), no es el científico el que crea el hecho en bruto, pero es por lo menos él quien crea el hecho científico.

Esta distinción entre el hecho en bruto y el hecho científico no me parece por sí misma ilegítima. Pero reclamo, primero, que la línea divisoria entre tales hechos no ha sido trazada de manera exacta o precisa, y entonces el autor parece suponer que el hecho crudo, al no ser científico, se encuentra fuera de la ciencia.

Finalmente, no puedo admitir la idea de que el científico crea sin restricción alguna al hecho científico, ya que es el hecho crudo el que lo impone [al hecho científico] sobre él.

Los ejemplos ofrecidos por el señor Le Roy me han sorprendido mucho. El primero está tomado de la noción del átomo. ¡El átomo escogido para ejemplificar un hecho! Confieso que esta elección me ha desconcertado tanto que prefiero no decir nada sobre ella. Evidentemente no he comprendido lo suficiente el pensamiento del autor y no podría discutirlo fructíferamente.

El segundo caso tomado como ejemplo es el de un eclipse en donde el fenómeno crudo es un juego de luz y sombra, pero en donde el astrónomo no puede intervenir sin introducir dos elementos ajenos, a saber, un reloj y la ley de Newton.

Finalmente, el señor Le Roy cita la rotación de la Tierra. A esto se ha respondido: pero esto no es un hecho, y él ha replicado: lo fue tanto para Galileo, quien lo afirmó, como para el inquisidor, quien lo negó. Siempre queda que este no es un hecho en el mismo sentido que aquellos sobre los que acabamos de hablar, y que darles el mismo nombre es exponerse a muchas confusiones.

Aquí tenemos entonces cuatro grados:

1°. Se pone oscuro, dice el payaso.

2°. El eclipse tuvo lugar a las nueve, dice el astrónomo.

3°. El eclipse tuvo lugar en el tiempo deducible de las tablas construidas de acuerdo con la ley de Newton, dice de nuevo el astrónomo.

4°. Lo anterior resulta de la Tierra girando alrededor del Sol, dice finalmente Galileo.

¿Dónde está entonces el límite entre el hecho en bruto y el hecho científico? Al leer al señor Le Roy, uno creería que está entre la primera y la segunda etapa, pero quién no puede ver que hay una mayor distancia entre la segunda y la tercera, e incluso más entre la tercera y la cuarta. Permítanme citar dos ejemplos que quizá nos iluminen un poco.

Yo observo la desviación de un galvanómetro con la ayuda de un espejo móvil que proyecta una imagen luminosa o un punto sobre una escala dividida. El hecho crudo es este: observo que el punto se desplaza sobre la escala, y el hecho científico es este: una corriente pasa en el circuito.

O de nuevo: cuando realizo un experimento, debo someter el resultado a ciertas correcciones porque sé que he cometido algunos errores. Estos errores son de dos tipos, algunos son accidentales y éstos debo corregirlos considerando la media, y los otros son sistemáticos, y entonces seré capaz de corregir éstos solamente a partir de un estudio exhaustivo de sus causas. El primer resultado obtenido es, pues, el hecho en bruto, mientras que el hecho científico es el resultado final una vez hechas mis correcciones.

Reflexionando sobre este último ejemplo, llegamos a subdividir nuestra segunda etapa, y en lugar de decir:

2. El eclipse tuvo lugar a las nueve, debemos decir:

2*a*. El eclipse tuvo lugar cuando mi reloj marcaba las nueve, y

2*b*. Estando mi reloj diez minutos atrasado, el eclipse tuvo lugar a las nueve y diez.

Y esto no es todo: la primera etapa también debe subdividirse, y la menor distancia no estaría entre estas dos subdivisiones. Es necesario distinguir entre la impresión de oscuridad sentida por uno que observa un eclipse y la afirmación *se pone oscuro* que esta impresión obtiene de tal observador. En cierto sentido, es lo primero lo único que es un verdadero hecho en bruto, y lo segundo es ya una especie de hecho científico.

Ahora nuestra escala tiene seis etapas, y aunque no hay razón para detenernos en este número, debemos parar en algún momento.

Lo que en principio me impresiona es esto. Al comienzo de nuestras seis etapas, el hecho, todavía completamente en bruto, es, por así decirlo, individual, y es absolutamente distinto de todos los demás hechos posibles. En la segunda etapa ya no es lo mismo. La enunciación del hecho se adaptará a una infinitud de otros hechos. Tan pronto como interviene el lenguaje, tengo a mi disposición solamente un número finito de términos para expresar las sombras, infinitas en número, que mis impresiones puedan cubrir. Cuando digo: se pone oscuro, esto bien expresa las impresiones que siento ante la presencia de un eclipse, pero incluso en la oscuridad pueden ser imaginadas una multitud de sombras y si, en lugar de haber sucedido tal sombra, hubiese sucedido una ligeramente distinta, también habría enunciado este *otro* hecho al decir: se pone oscuro.

Una observación más: incluso en la segunda etapa, la enunciación de un hecho sólo puede ser *verdadera* o *falsa*. Esto no es así para cualquier enunciación; si esta proposición es la enunciación de una convención, no puede decirse que tal enunciación sea *verdadera* en el sentido propio de la palabra, ya que, aparte de para mí, no puede ser verdadera, y solamente lo es porque deseo que lo sea.

Cuando decimos, por ejemplo, que la unidad de la longitud es el metro, estamos promulgando un decreto, ya que esto no es algo cerciorado que se impone sobre mí. Sucede lo mismo, como creo haberlo demostrado en algún lugar[§§§§], con los postulados euclidianos.

Cuando se me pregunta: ¿se está poniendo oscuro?, siempre sé si debo responder sí o no. Aunque una infinidad de posibles hechos puedan ser susceptibles a esta misma enunciación: *se está poniendo oscuro*[*****], siempre sabré si el hecho realizado pertenece o no a aquellos que responden a esta enunciación. Los hechos están clasificados en categorías, y si se me pregunta si el hecho del que estoy seguro pertenece o no a tal categoría, no debo dudar al responder.

Sin duda que esta clasificación es lo suficientemente arbitraria como para dejar mucho a la libertad o al propio capricho. En pocas palabras, esta clasificación es una convención. *Dada esta convención*, si se me pregunta: ¿es tal hecho cierto?, siempre sabré qué responder, y tal respuesta me será impuesta por el testimonio de mis sentidos.

Si, por lo tanto, durante un elipse se pregunta: ¿se está poniendo oscuro?, todo mundo respondería que sí. Es evidente que aquellos que hablen un lenguaje en donde a

---

[§§§§] Poincaré lo muestra en *Ciencia e Hipótesis*, especialmente en la parte II dedicada al estudio del espacio. Nota del Traductor.
[*****] Las cursivas son mías. Nota del Traductor.

lo luminoso se le llame oscuro, y a lo oscuro luminoso, responderían que no. ¿Pero qué importancia tiene eso?

Sucede lo mismo en las matemáticas. *Una vez establecidas las definiciones y los postulados que son convenciones,* un teorema, de aquí en adelante, sólo podrá ser verdadero o falso. Pero para responder la cuestión: ¿es verdadero este teorema?, ya no debo recurrir al testimonio de mis sentidos, sino al razonamiento.

La declaración de un hecho es siempre verificable, y para tal verificación debemos recurrir o bien al testimonio de nuestros sentidos, o a la memoria de este testimonio. Esto es propiamente lo que caracteriza a un hecho. Si, de nuevo, se me pregunta: ¿es tal hecho cierto?, debo comenzar por pedir, si existe la ocasión, que se declaren de manera precisa las convenciones, por preguntar, en otras palabras, qué lenguaje se está utilizando. Una vez instalados en este punto, interrogaré a mis sentidos y responderé afirmativa o negativamente. Pero serán mis sentidos los que habrán respondido, y no aquél que me dijo: te he hablado en inglés o en francés.

¿Hay algo que cambiar en todo lo anterior cuando pasamos a las siguientes etapas? Cuando observo un galvanómetro, tal como ya lo he dicho, y pregunto a un visitante ignorante: ¿está pasando la corriente?, él observará el cable intentando dilucidar si algo está pasando. Pero si planteo la misma pregunta a mi asistente que comprende tal lenguaje, sabrá lo que quiero decir: ¿se mueve el punto?, y observará la escala.

¿Cuál es pues la diferencia entre la declaración de un hecho en bruto y la declaración de un hecho científico? La misma diferencia que entre la declaración del mismo hecho crudo en francés y en alemán. La declaración científica es la traducción de la declaración cruda en un lenguaje distinguido, sobre todo, del alemán o del francés común, ya que es hablado por un número muy pequeño de personas.

Pero no vayamos tan rápido. Para medir una corriente puedo utilizar un gran número de tipos de galvanómetros o incluso un electrodinamómetro. Y entonces cuando digo que en este circuito está corriendo una corriente de tantos amperes, esto significará: si adapto a este circuito tal galvanómetro, veré al punto venir a la división *a*; pero eso igualmente significará: si adapto a este circuito tal electrodinamómetro, veré al punto ir a la división *b*. Y también significará muchas otras cosas, porque la corriente no sólo puede manifestarse a partir de efectos mecánicos, sino también químicos, térmicos, luminosos, etc.

Aquí hay entonces una misma declaración que cubre un gran número de hechos absolutamente distintos. ¿Por qué? Porque asumo una ley de acuerdo con la cual, siempre que suceda tal efecto mecánico, sucederá también tal efecto químico. Ciertos experimentos previos, muy numerosos, nunca han demostrado que esta ley falle, y después he comprendido que puedo expresar, por la misma declaración, dos hechos tan invariablemente ligados uno con el otro.

Cuando se me pregunta: ¿está pasando la corriente?, puedo entender que eso significa: ¿sucederá tal efecto mecánico?, pero también puedo entender que signifique: ¿sucederá tal efecto químico? Entonces verificaré o bien la existencia del efecto mecánico, o bien la del efecto químico. Pero eso será indiferente, ya que en ambos casos la respuesta debe ser la misma.

¿Y si llegamos al día en que tal ley resulta falsa? ¿Si fue percibido que la concordancia de los dos efectos, el mecánico y el químico, no es constante? Tal día será necesario cambiar el lenguaje científico para liberarlo de tan grave ambigüedad.

¿Y después de eso? ¿Se podría creer que el lenguaje ordinario, con la ayuda del cual se expresan los hechos de la vida diaria, está exento de ambigüedad?

¿Debemos entonces concluir que los hechos de la vida diaria son el trabajo de los filólogos?

Se me pregunta: ¿hay una corriente? Intento verificar que el efecto mecánico existe, compruebo que sí, y entonces respondo: sí, hay una corriente. Se entiende, enseguida, que eso significa que el efecto mecánico existe, y que el efecto químico, que no he investigado, también existe. Imaginemos ahora, suponiendo una imposibilidad, que la ley que creemos como cierta no lo sea en realidad, y que el efecto químico no exista. Bajo esta hipótesis habría dos hechos distintos, uno directamente observado y que es cierto, y el otro inferido y que es falso. Estrictamente hablando, podría decirse que hemos creado al segundo [hecho]. De tal suerte que ese error corresponde a la parte de la colaboración personal del hombre en la creación del hecho científico.

Pero si podemos decir que el hecho en cuestión es falso, ¿no es justamente porque es una creación libre y arbitraria de nuestra mente, una convención disfrazada, en cuyo caso no sería ni cierta ni falsa? Y, en realidad, tal hecho era verificable. No he hecho tal verificación, pero pude haberla hecho. Si respondí mal, fue porque escogí hacerlo demasiado rápido, y sin haber preguntado a la naturaleza, que por sí sola conocía el secreto.

Cuando después de un experimento corrijo los errores accidentales y sistemáticos para llevar a cabo el hecho científico, el caso es el mismo. El hecho científico nunca será más que el hecho crudo traducido en otro lenguaje. Cuando digo: *es tal hora*, lo anterior es una forma corta de decir: hay una relación tal entre la hora indicada por mi reloj, y la hora que marcó al momento del paso de tal estrella y de tal otra estrella a través del meridiano. Y una vez adoptada esta convención del lenguaje, cuando se me pregunte: ¿es tal hora?, no dependerá de mí responder si sí o si no.

Pasemos ahora a la etapa anterior a la última. El eclipse tuvo lugar a la hora dada por las tablas deducidas de la ley de Newton. Esto también es una convención del lenguaje perfectamente clara para aquellos que saben mecánica celestial, o simplemente para aquellos que tienen las tablas calculadas por los astrónomos. Si se me pregunta: ¿el eclipse tuvo lugar a la hora prevista?, echo un vistazo al almanaque náutico, veo que el eclipse fue anunciado para suceder a las nueve, y entiendo que la pregunta significa: ¿el eclipse tuvo lugar a las nueve? No hay nada que cambiar en nuestras conclusiones. *El hecho científico es sólo el hecho crudo traducido en un lenguaje conveniente*.

Es cierto que en la última etapa las cosas cambian. ¿La Tierra gira? ¿Es éste un hecho verificable? ¿Pudieron Galileo y el inquisidor haber apelado al testimonio de sus sentidos para resolver la cuestión? Por el contrario, estaban de acuerdo en lo que a las apariencias se refiere, y, sin importar cuales fueron las experiencias acumuladas, hubieran seguido estando de acuerdo con respecto a las apariencias sin haber nunca convenido en su interpretación. Es sólo por esta razón que se vieron obligados a recurrir a procedimientos de discusión tan poco científicos.

Es por esto que creo que no disentían sobre el *hecho*: no tenemos derecho a dar el mismo nombre a la rotación de la Tierra, lo que fue el objeto de su discusión, y a los hechos crudos o científicos que hasta ahora hemos revisado.

Después de lo que precede, parece superfluo investigar si el hecho en bruto se encuentra fuera de la ciencia, ya que no puede haber ciencia sin hecho científico alguno, ni hecho científico sin hecho en bruto alguno, ya que el primero es solamente la traducción del segundo.

Y entonces, ¿tiene uno derecho a decir que el científico crea al hecho científico? Antes que nada, no lo crea de la nada, ya que lo hace a partir del hecho en bruto. Consecuentemente, no lo hace libremente y *como le plazca*. Sin importar qué tan capaz sea el trabajador, su libertad se encuentra siempre limitada por las propiedades del tosco material sobre el que trabaja.

Después de todo, ¿qué se quiere decir cuando se habla de esta libre creación del hecho científico y cuando se toma como ejemplo al astrónomo que interviene activamente en el fenómeno del eclipse al traer su reloj? ¿Se quiere decir que el eclipse tuvo lugar a las nueve, pero que si el astrónomo hubiese deseado que sucediera a las diez, lo que únicamente dependía de él, sólo hubiese tenido que adelantar su reloj una hora?

Pero entonces el astrónomo, al perpetrar tal chiste tan malo, hubiese evidentemente sido culpable de una equivocación. Cuando él me dice: el eclipse tuvo lugar a las nueve, entiendo que nueve es la hora deducida de la cruda indicación del péndulo después de la usual serie de correcciones. Si solamente me dio esa vulgar indicación, o si ha hecho correcciones contrarias a las reglas habituales, entonces ha cambiado el lenguaje convenido sin habérmelo advertido. Si, por el contrario, tuvo la atención de advertirme, no tengo nada de qué quejarme, ya que será siempre el mismo hecho expresado en otro lenguaje.

En suma, podríamos decir que *todo lo que un científico crea en un hecho es el lenguaje en el que lo enuncia*. Al predecir un hecho empleará este lenguaje, y esta predicción estará libre de ambigüedad para todos aquellos que puedan hablar y comprender tal lenguaje. Además, una vez hecha esta predicción, no depende de él si se cumple o no.

¿Qué queda entonces de la tesis del señor Le Roy? Esto: el científico interviene activamente al escoger los hechos dignos de observar. Un hecho aislado carece, por sí mismo, de interés, pero se vuelve interesante si uno tiene razón alguna para pensar que podría ayudar en la predicción de otros hechos o, mejor aún, si, habiendo sido predicho, su verificación es la confirmación de una ley. ¿Quién escogerá los hechos que, correspondiendo con estas condiciones, se han ganado tal lugar? Esta es precisamente la libre actividad del científico.

Y esto no es todo. He dicho que el hecho científico es la traducción de un hecho crudo en un determinado lenguaje, y he de añadir que cada hecho científico está formado por muchos hechos crudos. Esto se muestra lo suficiente con los ejemplos citados antes. Por ejemplo, para la hora del eclipse mi reloj marcó la hora α en el instante del eclipse; marcó la hora β en el momento del último tránsito del meridiano de una cierta estrella que tomamos como origen de las ascensiones rectas; y marcó la hora γ al momento del tránsito precedente [anterior] de esta misma estrella. Hay tres hechos distintos (y aún debe notarse que cada uno de ellos resulta de dos hechos simultáneos en

bruto, pero no nos detendremos en esto). En lugar de decir lo anterior, decimos: el eclipse tuvo lugar a la hora 24 $(\alpha-\beta)/(\beta-\gamma)$, y los tres hechos están combinados en un único hecho científico. He concluido que las tres lecturas α, β, γ hechas sobre mi reloj en tres momentos distintos carecen de interés y que lo único interesante fue la combinación $(\alpha-\beta)/(\beta-\gamma)$ de los tres. En esta conclusión se encuentra la libre actividad de mi mente.

Pero hasta ahí se acaba mi poder. No puedo hacer que esta combinación $(\alpha-\beta)/(\beta-\gamma)$ tenga tal valor y no tal otro, ya que no puedo influir ni sobre el valor de α, ni sobre el valor de β, ni sobre el valor de γ, que son impuestos sobre mí como hechos crudos.

En resumen: los hechos son hechos, y *si sucede que satisfacen una predicción, esto no es un efecto de nuestra libre actividad*. No existe una frontera precisa entre el hecho en bruto y el hecho científico. Sólo puede decirse que una enunciación de un hecho es *más cruda* o, por el contrario, *más científica* que otra.

IV. “NOMINALISMO” Y “LA INVARIANTE UNIVERSAL”

Si pasamos de los hechos a las leyes, es claro que la parte relativa a la libre actividad del científico será mucho mayor. ¿Pero no la había hecho ya mucho más grande el señor Le Roy? Esto es lo que vamos a examinar.

Recordemos primero los ejemplos que ha dado. Cuando decimos: el fósforo se derrite a 44°, pensamos estar enunciando una ley, pero en realidad sólo estamos definiendo al fósforo. Si descubriésemos un cuerpo que, por lo demás posea todas las propiedades del fósforo, no se derritiese a 44°, únicamente le daríamos otro nombre, y la ley en cuestión seguiría siendo cierta.

Sucede lo mismo cuando decimos: los cuerpos pesados cayendo libremente pasan a través de espacios proporcionales a los cuadrados de los tiempos; solamente estamos definiendo la caída libre de los cuerpos. Cuando no se satisfaga tal condición, diremos que la caída no es libre, de tal suerte que la ley nunca sea errónea.

Es claro que si las leyes se redujesen a eso, no podrían servir para predecir, y no serían buenas para nada: ni como medio para conocer, ni como principio de acción.

Cuando decimos que el fósforo se derrite a 44°, en realidad queremos decir: todos los cuerpos poseyendo tal o cual propiedad (esto es, todas las propiedades del

fósforo, salvo el punto de fusión) se funden a 44°. Así entendida, nuestra proposición es de hecho una ley, y esta ley nos es útil porque si encontramos un cuerpo que posea estas propiedades, seremos capaces de predecir que se fundirá a 44°.

No cabe duda que la ley puede llegar a ser falsa. Entonces leeríamos en los tratados de química: “Existen dos cuerpos que los químicos confundieron por mucho tiempo bajo el nombre de fósforo; estos cuerpos difieren únicamente en sus puntos de fusión”. Esta no sería la primera vez que los químicos logren separar dos cuerpos que en un principio no podían distinguir; tales, por ejemplo, son el neodimio y el praseodimio, confundidos por mucho tiempo bajo el nombre del didimio.

No creo que los químicos teman mucho a un infortunio parecido con el fósforo. Y si, suponiendo lo imposible, sucediese, los dos cuerpos probablemente no tendrían una densidad *idéntica*, un calor específico *idéntico*, etc., de tal forma que, después de haber determinado cuidadosamente la densidad, por ejemplo, uno podría todavía prever el punto de fusión. Lo anterior no es tan importante, pero sirve para hacer notar que hay una ley, y que esta ley - cierta o falsa - no se reduce a una tautología.

¿Podría decirse que si no conociésemos sobre la Tierra un cuerpo que, teniendo todas las otras propiedades del fósforo, no se fundiese a 44°, nos sería imposible saber si existe en otros planetas? Sin duda lo anterior podría sostenerse, y entonces se inferiría que la ley en cuestión, que puede servirnos como regla de acción a aquellos que habitamos la Tierra, carecería de un valor general desde el punto de vista del conocimiento, y debería su interés únicamente a la casualidad que nos ha puesto sobre este globo. Esto es posible, pero si fuese así, la ley carecería de valor alguno, no porque estaría reducida a una convención, sino porque sería falsa.

Lo mismo es cierto en lo que concierne a la caída de los cuerpos. No nos haría ningún bien haber dado el nombre de caída libre a las caídas que tienen lugar en conformidad con la ley de Galileo, si no supiésemos que, en otra parte y bajo ciertas circunstancias, la caída sería *probablemente* libre o *aproximadamente* libre. Esta es entonces una ley que puede ser cierta o falsa, pero que no se reduce a una convención.

Supongamos que los astrónomos descubren que las estrellas no obedecen de manera exacta a la ley de Newton. Tendrían la opción de tomar dos actitudes: podrían decir que la gravitación no varía de manera exacta como el inverso del cuadrado de la distancia, o podrían decir que la gravitación no es la única fuerza que actúa sobre las estrellas y que además hay otro tipo distinto de fuerza.

En el segundo caso, la ley de Newton sería considerada como la definición de la gravitación, y esta sería la actitud nominalista. La elección entre ambas actitudes es libre y hecha por consideraciones de conveniencia, aunque estas últimas sean a menudo tan fuertes que prácticamente queda poco de esta libertad.

Podemos dividir esta proposición: (1) Las estrellas obedecen a la ley de Newton, en dos proposiciones más: (2) la gravitación obedece a la ley de Newton; (3) la gravitación es la única fuerza que actúa sobre las estrellas. En este caso, la proposición (2) ya no es nada sino una definición y se encuentra más allá de cualquier prueba experimental; pero entonces esta verificación [experimental] podría hacerse sobre (3). En realidad, esto último es necesario, ya que la proposición resultante (1) predice hechos verificables en bruto.

Es gracias a estos artificios que, a partir de un nominalismo inconsciente, los científicos han elevado las leyes que llaman principios. Cuando una ley ha recibido una confirmación suficiente por parte del experimento, podemos tomar dos actitudes: o podemos dejar a esta ley en la refriega, y entonces quedará sujeta a una revisión incesante que sin duda terminará por demostrar que tal ley es sólo aproximada, o bien podemos elevarla a la condición de *principio* al adoptar convenciones que permitan que la proposición sea ciertamente verdadera. El procedimiento para lo anterior es siempre el mismo. La ley primitiva enunció una relación entre dos hechos en bruto, *A* y *B*; entre estos dos hechos crudos se introduce un intermediario abstracto *C* más o menos ficticio (en el ejemplo anterior, tal fue el ente impalpable de la gravitación). Y entonces tenemos una relación entre *A* y *C* que podemos suponer como rigurosa y que es el *principio*, y otra entre *C* y *B* que permanece como una *ley* sujeta a revisión.

El principio, de aquí en adelante cristalizado, por decirlo de alguna manera, ya no se encuentra sujeto a la prueba experimental. No será ni cierto ni falso, sino conveniente.

Se han conseguido grandes cosas al proceder de esta manera, pero es claro que si *todas* las leyes hubiesen sido transformadas en principios, no quedaría *nada* de la ciencia. Cada ley puede dividirse en un principio y en una ley, pero de este modo es muy claro que, sin importar qué tan lejos llevemos esta partición, siempre quedarán leyes. El nominalismo tiene, por tanto, límites, y esto no se llegaría a comprender bien si se tomasen al pie de la letra las aserciones del señor Le Roy.

Un examen rápido de las ciencias nos haría comprender mejor cuáles son estos límites. La actitud nominalista se justifica sólo cuando es conveniente. La pregunta es, pues, ¿cuándo lo es?

El experimento nos enseña relaciones entre los cuerpos; este es el hecho en bruto. Tales relaciones son extremadamente complicadas. En lugar de concebir directamente la relación del cuerpo *A* y el cuerpo *B*, introducimos, entre ellos, un intermediario, que es el espacio, y entonces concebimos tres distintas relaciones: la del cuerpo *A* con la figura *A'* del espacio, la del cuerpo *B* con la figura *B'* del espacio, y la de las dos figuras *A'* y *B'* una con la otra. ¿Por qué resulta ventajoso este rodeo? Porque la relación entre *A* y *B* es complicada, pero difiere poco de la relación entre *A'* y *B'*, que es simple; de tal suerte que esta complicada relación puede ser remplazada por la simple relación entre *A'* y *B'* y por otras dos relaciones que nos dicen que las diferencias entre *A* y *A'*, por una parte, y entre *B* y *B'*, por la otra, son *muy pequeñas*. Por ejemplo, si *A* y *B* son dos cuerpos sólidos naturales desplazados con una leve deformación, concebimos dos figuras *rígidas* movibles *A'* y *B'*. Las leyes de los desplazamientos relativos de estas figuras *A'* y *B'* serán muy simples porque serán aquellas de la geometría. Y más tarde debemos añadir que el cuerpo *A*, que siempre difiere muy poco de *A'*, se dilata por el efecto del calor y se dobla por el efecto de la elasticidad. Debido a que son muy pequeñas, estas dilataciones y flexiones nos serán relativamente fáciles de estudiar. Sólo imaginemos qué complejidades lingüísticas hubiesen sido necesarias si quisiéramos comprender, en la misma enunciación, el desplazamiento del sólido, su dilatación, y su flexura.

La relación entre *A* y *B* fue una ley cruda que después fue dividida. Ahora tenemos dos leyes que expresan las relaciones entre *A* y *A'*, entre *B* y *B'*, y un principio que expresa la [relación] de *A'* con *B'*. El agregado de estos principios se llama geometría.

Dos observaciones más. Tenemos una relación entre dos cuerpos *A* y *B* que hemos remplazado por una relación entre dos figuras *A'* y *B'*; pero esta misma relación entre las mismas dos figuras *A'* y *B'* podría igualmente bien haber remplazado una relación entre dos otros cuerpos *A''* y *B''*, completamente distintos de *A* y *B*. Y lo anterior de muchas formas. Si los principios y la geometría no hubieran sido inventados, después de haber estudiado la relación de *A* y *B*, hubiese sido necesario comenzar, *desde cero*, el estudio de la relación entre *A''* y *B''*. Es por eso que la geometría es tan preciosa. Una relación geométrica puede ventajosamente remplazar una relación que,

tomada en estado bruto, pueda considerarse como mecánica, puede remplazar otra que pueda considerarse como óptica, etc.

Pero que nadie diga que lo anterior prueba que la geometría es una ciencia experimental aduciendo lo siguiente: al separar sus principios de las leyes de donde han sido trazados, artificialmente se separan de las ciencias que les dieron forma. Las demás ciencias igualmente tenían principios, pero eso no evita que los llamemos experimentales.

Debe reconocerse que hubiese sido difícil no hacer esta separación pretendida como artificial. Conocemos el papel que ha desempeñado la cinemática de los cuerpos sólidos en la génesis de la geometría; ¿debe entonces decirse que la geometría es sólo una rama de la cinemática experimental? Las leyes de la propagación rectilínea de la luz también han contribuido a la formación de sus principios. ¿Debe considerarse a la geometría como una rama de la cinemática y como una rama de la óptica? Recuerdo además que nuestro espacio euclidiano, que es el objeto propio de la geometría, ha sido escogido por razones de conveniencia de entre un cierto número de tipos que preexisten en nuestra mente y que son llamados grupos.

Si pasamos a la mecánica, aún observamos grandes principios cuyo origen es análogo y, como su "radio de acción", por decirlo de alguna manera, es menor, ya no hay razón alguna para separarlos de la propia mecánica y considerar esta ciencia como deductiva.

Finalmente, en la física el papel de los principios es aún menor, y en realidad sólo son introducidos cuando hacerlo supone una ventaja. Ahora bien, resultan ventajosos precisamente porque son pocos, ya que cada uno de ellos remplaza un gran número de leyes. Por lo tanto, no hay razón para multiplicarlos. Además, es necesario un desenlace, y para tal se requiere que la abstracción afiance la realidad.

Tales son los estrechos límites del nominalismo. Pero el señor Le Roy ha insistido en sus puntos, y ha puesto la cuestión bajo otra forma.

Ya que la enunciación de nuestras leyes puede variar con las convenciones que adoptemos, y ya que estas convenciones pueden modificar incluso las relaciones naturales de estas leyes, ¿hay algo - en la variedad de estas leyes - que sea independiente de estas convenciones y que pueda desempeñar, por decirlo de alguna manera, el papel de *invariante universal*? Por ejemplo, si se introdujese la ficción para seres que, habiendo sido educados en un mundo distinto al nuestro, hubiesen llegado a crear una geometría no euclidiana. Si estos seres fuesen repentinamente transportados a

nuestro mundo, observarían las mismas leyes que nosotros, pero las enunciarían en una forma totalmente distinta. En realidad, aún habría algo en común entre ambas enunciaciones, pero esto es porque estos seres no difieren tanto de nosotros. Pueden ser imaginados seres todavía más ajenos y extraños a nosotros, y la parte común a ambos sistemas de enunciaciones se encogería más y más. La pregunta es, ¿llegará a encogerse hasta cero, o quedará un residuo irreducible que será el ansiado invariante universal?

La cuestión requiere una declaración precisa. ¿Es deseable que esta parte común de las enunciaciones sea expresable en palabras? Es claro entonces que no hay palabras comunes a todos los lenguajes, y no podemos pretender construir no sé qué invariante universal que pueda ser comprendida tanto por nosotros como por los geómetras no euclidianos sobre los que he hablado. Así como tampoco podemos construir una frase que pueda ser entendida tanto por alemanes que no entienden francés como por franceses que no entienden alemán. No obstante, hemos fijado reglas que nos permiten traducir enunciados franceses al alemán y viceversa. Es por eso que han sido posibles las gramáticas y los diccionarios. También hay reglas fijas para traducir el lenguaje euclidiano en un lenguaje no euclidiano o, si no las hay, se pueden hacer.

E incluso si no hubiese intérpretes ni diccionario alguno, si los alemanes y los franceses, después de haber vivido por siglos en mundos separados, tuvieran por fin contacto, ¿podría pensarse que no habría nada en común entre la ciencia de los alemanes y la ciencia de los franceses? Tanto franceses como alemanes acabarían, ciertamente, entendiéndose unos con otros, tal como los indios americanos terminaron por entender el lenguaje de sus conquistadores después de la llegada de los españoles.

Pero, podría decirse, sin duda los franceses serían capaces de comprender a los alemanes incluso sin haber estudiado alemán, pero esto se debe a que permanece entre ellos algo en común, a saber, que ambos son hombres. Aún así deberíamos conseguir un entendimiento con nuestros hipotéticos no euclidianos, aunque no sean hombres, porque aún retendrían algo humano. Pero, en cualquier caso, es necesario un mínimo de humanidad.

Esto es posible, pero primero hay que observar que esta pequeña humanidad que permanecería en los no euclidianos sería suficiente no sólo para traducir *un poco* de su lenguaje, sino para traducir *todo* su lenguaje.

Ahora bien, concedo que deba haber un mínimo [de humanidad]. Supongamos que existe no sé qué fluido que penetra entre las moléculas de nuestra materia sin ejercer acción alguna sobre ella y sin estar sujeto a acción alguna que provenga de ella.

Supongamos ahora seres sensibles a la influencia de este fluido e insensibles al de nuestra materia. Claramente, la ciencia de estos seres diferiría notablemente de la nuestra y sería vano buscar una “invariante” común a estas dos ciencias. O, de nuevo, si estos seres rechazaran nuestra lógica y no admitiesen, por ejemplo, el principio de contradicción.

Pero en verdad creo que no hay interés alguno en examinar tales hipótesis.

Y entonces, si no llevamos nuestros caprichos demasiado lejos, si introducimos solamente seres ficticios teniendo sentidos análogos a los nuestros y sensibles a las mismas impresiones y, por otra parte, admitiendo los principios de nuestra lógica, entonces seremos capaces de concluir que su lenguaje, no obstante qué tanto difiera del nuestro, siempre será capaz de ser traducido. Ahora, la posibilidad de traducción implica la existencia de una invariante, y para traducir es preciso, pues, desacoplar esta invariante. Así, descifrar un criptograma implica buscar qué permanece invariante en este documento cuando las letras se permutan.

Ahora es fácil comprender cuál es la naturaleza de esta invariante, y unas pocas palabras nos serán suficientes. Las leyes invariantes son las relaciones entre los hechos crudos, mientras que las relaciones entre los “hechos científicos” siempre dependen de ciertas convenciones.

CAPÍTULO XI

CIENCIA Y REALIDAD

V. CONTINGENCIA Y DETERMINISMO

No pretendo tratar aquí la cuestión de la contingencia de las leyes de la naturaleza, evidentemente insoluble, y sobre la cual ya se ha escrito mucho. Sólo quiero llamar la atención sobre los diferentes significados dados a esta palabra, *contingencia,* y cuán ventajoso resultaría distinguir tales significados.

Si observamos cualquier ley particular, podemos estar seguros - de antemano - que únicamente puede ser aproximada. Y esto es porque tal ley se deduce de verificaciones experimentales, y estas verificaciones fueron y sólo pueden ser aproximadas. Siempre debemos esperar que mediciones más precisas nos obliguen a añadir nuevos términos a nuestras fórmulas; esto es lo que sucedió, por ejemplo, en el caso de la ley de Marriotte.

Por otra parte, la declaración de cualquier ley es necesariamente incompleta. Esta enunciación debe comprender la enumeración de *todos* los antecedentes en virtud de los cuales puede tener lugar un consecuente dado. Primero debemos describir *todas* las condiciones del experimento a realizarse y entonces la ley estará declarada: si todas las condiciones están satisfechas, el fenómeno tendrá lugar.

Pero estaremos seguros de no haber olvidado *ninguna* de estas condiciones sólo cuando habremos descrito el estado del universo entero en el instante t; todas las partes de este universo pueden ejercer, en realidad, una influencia más o menos grande sobre el fenómeno a tener lugar en el instante $t + dt$.

Ahora resulta claro que tal descripción no puede encontrarse en la enunciación de la ley. Además, si fuese hecha, la ley no podría ser aplicada: si uno requiriese tantas condiciones, habría muy poca probabilidad de que todas tengan lugar en cualquier momento dado.

Entonces, como uno nunca puede estar seguro de no haber olvidado alguna condición esencial, no es válido decir: si tales y cuales condiciones tienen lugar, ocurrirá tal fenómeno. Únicamente puede decirse: si tales y cuales condiciones tienen lugar, es probable que ocurra tal fenómeno muy cerca.

Tomemos la ley de la gravitación, que es la menos imperfecta de todas las leyes conocidas. Esta ley nos permite prever los movimientos de los planetas, y cuando la usamos, por ejemplo, para calcular la órbita de Saturno, omitimos la acción de las estrellas y, al hacerlo, estamos seguros de no engañarnos, porque sabemos que estas estrellas están demasiado lejos como para que su acción sea sensible.

Enunciamos, entonces, con una cuasi certeza que las coordenadas de Saturno en tal hora estarán comprendidas entre tales y cuales límites. ¿Pero es una certeza absoluta? ¿No podría existir en el universo alguna masa gigantesca, mucho mayor que la de todas las estrellas conocidas, y cuya acción pudiese hacerse sentir a grandes distancias? Esta masa podría estar animada por una velocidad colosal, y después de haber circulado desde todos los tiempos a tales distancias de tal suerte que su influencia ha sido hasta ahora insensible para nosotros, podría llegar a pasar cerca de donde nos encontramos. Seguramente produciría perturbaciones enormes en nuestro Sistema Solar que no pudieron haberse previsto. Todo lo que puede decirse es que tal evento es altamente improbable, y entonces, en lugar de decir: Saturno estará cerca de tal punto de los cielos, debemos limitarnos a decir: Saturno probablemente estará cerca de tal punto de los cielos. Aunque esta probabilidad pueda ser prácticamente equivalente a la certeza, es sólo una probabilidad.

Es por todas estas razones que ninguna ley particular será nunca más que aproximada y probable. Los científicos nunca han dejado de reconocer esta verdad, y creen, bien o mal, que cada ley puede ser remplazada por otra más cercana y más probable, y que esta nueva ley será solamente provisional, pero que el mismo movimiento puede continuar indefinidamente, de tal forma que la ciencia, al progresar, poseerá leyes cada vez más probables, y que la aproximación terminará por diferir tan poco como se pretenda de la exactitud y la probabilidad de la certeza.

Si los científicos que piensan así estuviesen en lo correcto, ¿debería decirse que *las* leyes de la naturaleza son contingentes, aun cuando *cada* ley, tomada por separado, pueda calificarse como contingente? ¿O debemos requerir, antes de concluir la contingencia *de las* leyes naturales, que este progreso tenga un fin, que los científicos dejen algún día de buscar una aproximación cada más cercana y que, más allá de cierto límite, encuentren sólo capricho en la naturaleza?

En la concepción de la que recién he hablado (y que llamaré la concepción científica), cada ley es sólo una declaración, imperfecta y provisional, que algún día será

remplazada por otra ley superior, y de la cual la primera solamente es una cruda imagen. No queda lugar, pues, para la intervención del libre albedrío.

Me parece que la teoría cinética de los gases nos proveerá de un ejemplo sorprendente de esto.

Sabemos que en esta teoría todas las propiedades de los gases se explican por simples hipótesis. Se supone que todas las moléculas gaseosas se mueven en cada dirección a grandes velocidades, y que siguen caminos rectilíneos que se ven perturbados sólo cuando una molécula pasa muy cerca de los lados del recipiente o de otra molécula. Los efectos que nuestros crudos sentidos nos permiten observar son los efectos medios, y en estos medios las grandes desviaciones se compensan - o por lo menos es muy improbable que no se compensen - de tal suerte que los fenómenos observables siguen leyes simples tales como la de Marriotte o la de Gay-Lussac. Pero esta compensación de desviaciones es solamente probable. Las moléculas cambian incesantemente de lugar y en estos continuos desplazamientos las figuras que forman pasan sucesivamente por todas las combinaciones posibles. Una a una, estas combinaciones son muy numerosas y casi todas están en conformidad con la ley de Marriotte, aunque hay algunas que se desvían de ella. Esto también sucedería [que se desviasen de la ley de Marriotte], sólo que sería necesario esperar por mucho tiempo para ello. Si se observase un gas durante un tiempo lo suficientemente grande, finalmente se vería que se desviaría, por muy poco tiempo, de la ley de Marriotte. ¿Cuánto tiempo sería necesario esperar? Si se deseara calcular el número probable de años, se encontraría que este número resulta tan grande que para escribirlo se necesitaría mucho espacio. Lo anterior no importa; es suficiente con que pueda hacerse.

No me interesa discutir aquí el valor de esta teoría. Es evidente que si fuese adoptada, la ley de Marriotte se mostraría sólo como contingente, ya que llegará un día en que dejará de ser cierta. Y sin embargo, ¿puede pensarse que los partidarios de la teoría cinética son adversarios del determinismo? En absoluto: son los más ultra mecanicistas. Sus moléculas siguen trayectorias rígidas, de las cuales se alejan sólo bajo la influencia de fuerzas que varían con la distancia, siguiendo una ley perfectamente determinada. No queda en su sistema el lugar más pequeño para la libertad, o para un factor evolutivo, propiamente dicho, o para nada que pueda ser llamado contingente. Diré además, para evitar el error, que tampoco hay una evolución de la ley de Marriotte; cesa de ser cierta después de no sé cuántos siglos, pero al final de una fracción de segundo, vuelve a ser cierta y además por un número incalculable de siglos.

Y como ya he dicho la palabra *evolución*, aclaremos otro error más. A menudo se suele decir que no se sabe si las leyes no evolucionan, y que entonces podremos descubrir, algún día, que en la época carbonífera las leyes fueron lo que son hoy. ¿Qué debemos entender por eso? Lo que creemos saber acerca del estado pasado de nuestro globo lo deducimos de su estado presente. ¿Y cómo se lleva a cabo esta deducción? Por medio de leyes supuestamente conocidas. La ley, al ser una relación entre el antecedente y el consecuente, nos permite igualmente bien deducir el consecuente del antecedente, esto es, prever el futuro, y deducir el antecedente del consecuente, esto es, concluir del presente hacia el pasado. El astrónomo que conoce la situación presente de las estrellas puede deducir de ella su situación futura a partir de la ley newtoniana, y esto es lo que hace cuando construye efemérides; e igualmente puede deducir de ella [la situación presente] su situación pasada. Los cálculos que así puede hacer no le permiten saber si la ley de Newton dejará de ser cierta en el futuro, precisamente porque esta ley es su punto de partida, ni tampoco pueden decirle si no era cierta en el pasado. En lo que concierne al futuro, puede llegar un día en el que se pruebe que sus efemérides fueron falsas, pero en lo que concierne al pasado, el pasado geológico que no tuvo testigo alguno, los resultados de sus cálculos - como todos aquellos de donde pretendemos deducir el pasado del presente - escapan, por su propia naturaleza, a todo tipo de examen. De tal suerte que si las leyes de la naturaleza no fueron las mismas en la era carbonífera que en la época presente, nunca podríamos saberlo, ya que sólo podemos saber de esta época lo que deducimos de las hipótesis de estas leyes.

Quizá se dirá que estas hipótesis podrían llevarnos a resultados contradictorios y que entonces nos veríamos obligados a abandonarlas. Así, en lo que concierne al origen de la vida, podríamos concluir que siempre ha habido seres vivos, ya que el mundo presente siempre nos muestra vida surgiendo de otra vida; pero también podríamos concluir que no siempre ha habido tal, ya que la aplicación de las leyes existentes de la física al estado presente de nuestro globo nos muestra que hubo un tiempo en el que éste era tan caliente que la vida sobre él era imposible. Pero las contradicciones de este tipo siempre pueden evitarse de dos formas: puede suponerse que las leyes reales de la naturaleza no son exactamente lo que hemos asumido, o bien puede suponerse que las leyes de la naturaleza realmente son lo que hemos asumido, pero que no siempre ha sido así.

Es evidente que las leyes reales nunca serán lo suficientemente bien conocidas como para que no adoptemos la primera de estas dos soluciones y como para que no nos constriñamos a inferir la evolución de las leyes naturales.

Por otra parte, supongamos tal evolución. Asumamos, si se quiere, que la humanidad sobrevive lo suficiente como para observar esta evolución. El *mismo* antecedente deberá producir, por ejemplo, consecuencias distintas en la época carbonífera y en la cuaternaria. Eso obviamente significa que los antecedentes son muy parecidos; si todas las circunstancias fuesen idénticas, la época carbonífera sería indistinguible de la cuaternaria. Evidentemente esto no es lo que se supone. Lo que queda es que tal antecedente, acompañado por tal circunstancia accesoria, produce tal consecuente, y que el mismo antecedente, acompañado por otra circunstancia accesoria, produce otro consecuente. El tiempo, por tanto, no entra en el asunto.

La ley, tal como la mal informada ciencia la hubiera declarado, y que hubiese afirmado que este antecedente siempre produce este consecuente sin tomar en cuenta las circunstancias accesorias, esta ley, que sólo era aproximada y probable, debe ser remplazada por otra ley más aproximada y más probable que considere estas circunstancias accesorias. Siempre regresamos, por tanto, al mismo proceso que hemos analizado arriba, y si la humanidad descubriese algo de este tipo, no diría que son las leyes las que han evolucionado, sino las circunstancias las que han cambiado.

Aquí, por consiguiente, encontramos varios sentidos distintos de la palabra *contingente*. El señor Le Roy se queda con todos y no los distingue lo suficiente, sino que introduce uno nuevo. Las leyes experimentales son sólo aproximadas, y si algunas nos parecen exactas es porque artificialmente las hemos transformado en lo que antes he llamado un principio. Hemos hecho esta transformación libremente, y como el capricho que nos ha determinado a hacerlo es algo eminentemente contingente, hemos traspasado esta contingencia a la ley en sí misma. Es en este sentido que tenemos derecho a decir que el determinismo supone libertad, ya que libremente nos hemos vuelto deterministas. Quizá se encuentre que esto equivale a dar demasiado ámbito de acción al nominalismo y que la introducción de este nuevo sentido de la palabra *contingencia* no nos ayudará mucho a resolver todas las cuestiones que naturalmente surjan y sobre las que recién hemos hablado.

Para nada deseo investigar aquí los fundamentos del principio de la inducción porque sé muy bien que no tendré éxito al hacerlo: es tan difícil justificar este principio

como librarse de él. Sólo deseo mostrar cómo es que los científicos lo aplican y cómo se ven forzados a aplicarlo.

Cuando el mismo antecedente se repite, el mismo consecuente debe igualmente repetirse; tal es la exposición ordinaria. Pero reducido a estos términos, el principio dejaría de ser útil. Para que uno pueda decir que el mismo antecedente se repitió, es necesario que *todas* las circunstancias se reproduzcan, ya que ninguna resulta absolutamente indiferente, y que además se reproduzcan *exactamente* igual. Y como lo anterior nunca sucederá, el principio carece de aplicación alguna.

Debemos pues modificar la enunciación y decir: si un antecedente *A* ha producido una vez un consecuente *B*, un antecedente *A'*, ligeramente distinto de *A*, producirá un consecuente *B'* ligeramente distinto de *B*. ¿Pero cómo es que reconocemos que los antecedentes *A* y *A'* son "ligeramente distintos"? Si algunas de las circunstancias pueden expresarse por un número, y si este número tiene en ambos casos valores muy cercanos, el sentido de la frase "ligeramente distinto" es relativamente claro: el principio significa entonces que el consecuente es una función continua del antecedente. Y como una regla práctica, llegamos a esta conclusión la cual tenemos derecho de interpolar. Esto es en realidad lo que los científicos hacen día con día, y sin la interpolación toda ciencia sería imposible.

Una cosa más. La ley buscada puede ser representada por una curva. El experimento nos ha enseñado ciertos puntos de esta curva. En virtud del principio que hemos declarado, creemos que estos puntos están conectados por una gráfica continua, y trazamos esta gráfica con el ojo. Después, nuevos experimentos nos proveerán de nuevos puntos para la curva. Si estos puntos se encuentran fuera de la gráfica trazada de antemano, tendremos que modificar nuestra curva, pero no abandonar nuestro principio. A través de cualesquiera puntos, sin importar qué tan numerosos sean, siempre puede pasar una curva continua. Sin duda que si esta curva es demasiado caprichosa estaremos en shock (e incluso sospecharíamos de errores experimentales), pero el principio no tendrá directamente la culpa.

Además, entre las circunstancias de un fenómeno hay algunas que consideramos como despreciables, y debemos considerar a *A* y a *A'* como ligeramente distintas si difieren sólo por estas circunstancias accesorias. Por ejemplo, hemos comprobado que el hidrógeno se une con el oxígeno bajo la influencia de una chispa eléctrica, y estamos seguros de que estos dos gases se unirán nuevamente aunque la longitud de Júpiter haya cambiado considerablemente en el intervalo. Asumimos, por ejemplo, que el estado de

los cuerpos distantes no puede tener una influencia sensible sobre los fenómenos terrestres, y esto parece ser indispensable, aunque haya casos en donde la elección de estas circunstancias prácticamente indiferentes admita más arbitrariedad o, si se prefiere, requiera más tacto.

Una observación más: el principio de la inducción sería inaplicable si no existiese en la naturaleza una gran cantidad de cuerpos iguales, o por lo menos muy parecidos, y si no pudiésemos inferir, por ejemplo, de un pedacito de fósforo a otro pedacito de fósforo.

Si reflexionamos sobre estas consideraciones, el problema del determinismo y de la contingencia nos aparecerá bajo una nueva luz.

Supongamos que somos capaces de abarcar la serie de todos los fenómenos del universo en toda la secuencia del tiempo. Podríamos concebir lo que se llamaría las *secuencias*, a saber, relaciones entre lo antecedente y lo consecuente. No deseo hablar de relaciones constantes o de leyes, sino que concibo por separado (individualmente, por así decirlo) las distintas secuencias realizadas.

Entonces reconoceríamos que, entre estas secuencias, no hay dos que sean iguales. Pero si el principio de la inducción - tal como lo hemos declarado - es cierto, habrá algunas muy parecidas y que puedan ser clasificadas una junto con otra. En otras palabras, es posible hacer una clasificación de secuencias.

El determinismo se reduce, al final, a la posibilidad y a la legitimidad de tal clasificación. Esto es todo lo que sobre él nos deja el análisis precedente, y quizá, bajo esta forma, resulte menos aterrador al moralista.

Sin duda se dirá que esto no es más que llegar, por otro camino, a la conclusión del señor Le Roy que hace un momento parecíamos rechazar: somos deterministas voluntariamente. Y en realidad, toda clasificación supone la intervención activa del clasificador. Estoy de acuerdo con que esto puede sostenerse, pero me parece que este otro camino no ha sido inútil y que habrá contribuido a iluminarnos un poco.

VI. LA OBJETIVIDAD DE LA CIENCIA

Llegamos a la cuestión planteada por el título de este artículo: ¿Cuál es el valor objetivo de la ciencia? Y antes que nada, ¿qué debemos entender por objetividad?

Lo que garantiza la objetividad del mundo en el que vivimos es que éste nos es común junto con otros seres pensantes. A través de la comunicación que tenemos con

otros hombres recibimos razonamientos confeccionados; sabemos que estos razonamientos no provienen de nosotros pero, al mismo tiempo, reconocemos en ellos la labor de seres razonables como nosotros mismos. Y como estos razonamientos parecen ajustarse al mundo de nuestras sensaciones, pensamos poder inferir que estos seres razonables han visto lo mismo que nosotros, y así sabemos que no hemos estado soñando.

Tal es, pues, la primera condición de la objetividad: lo que es objetivo debe ser común a muchas mentes y, consecuentemente, transmisible de una mente a otra; y como esta transmisión sólo puede darse por aquel "discurso" que inspira tanta desconfianza en el señor Le Roy, nos vemos forzados a concluir que sin discurso no hay objetividad.

Las sensaciones de otros son para nosotros un mundo eternamente cerrado. No tenemos medio alguno para verificar que la sensación que llamo roja es la misma que la que mi vecino llama roja.

Supongamos que una cereza y una amapola roja producen en mí la sensación *A* y en mi vecino la sensación *B* y que, por el contrario, una hoja produce en mí la sensación *B* y en él la sensación *A*. Es claro que nunca sabremos nada sobre esto, ya que yo llamo roja a la sensación *A* y verde a la sensación *B*, mientras que él llama a la primera verde y a la segunda roja. En compensación, lo que seríamos capaces de comprobar es que, tanto para él como para mí, la cereza y la amapola roja producen la *misma* sensación, ya que él da el mismo nombre a las sensaciones que siente y yo hago lo mismo.

Las sensaciones son, por lo tanto, intransmisibles, o mejor dicho, todo lo que es cualidad pura en ellas es intransmisible e impenetrable por siempre. Pero no sucede lo mismo con las sensaciones entre estas sensaciones.

Desde este punto de vista, todo lo que es objetivo está desprovisto de toda cualidad y se refiere sólo a las puras relaciones. Ciertamente, no iré tan lejos como para decir que la objetividad es sólo puramente cuantitativa (esto sería particularizar demasiado la naturaleza de las relaciones en cuestión), pero comprendemos cómo alguien pudo haber llegado a decir que el mundo es únicamente una ecuación diferencial.

Con la debida reserva respecto a esta proposición paradójica, debemos admitir que nada es objetivo si no es transmisible y que, por consiguiente, las relaciones entre las sensaciones pueden tener por sí mismas un valor objetivo.

Quizá se dirá que la emoción estética, común a toda la humanidad, es prueba suficiente de que las cualidades de nuestras sensaciones son también las mismas para

todos los hombres y que, por tanto, son objetivas. Pero si pensamos sobre esto, veremos que la prueba no es completa; lo que se prueba es que esta emoción se despierta tanto en Juan como en Jaime por las sensaciones a las que Jaime y Juan dan el mismo nombre o por las correspondientes combinaciones de estas sensaciones; ya sea porque esta emoción está asociada en Juan con la sensación *A*, que Juan llama roja, mientras que paralelamente está asociada en Jaime con la sensación *B*, a la que Jaime llama roja; o bien porque esta emoción se despierta no por las cualidades por sí mismas de las sensaciones, sino por la armoniosa combinación de sus relaciones, de las cuales experimentamos una impresión inconsciente.

Tal sensación es hermosa, y no porque posea tal o cual cualidad, sino porque ocupa un lugar en la trama de nuestras asociaciones de ideas, de tal forma que no puede ser estimulada sin poner en movimiento al "receptor" que se encuentra al otro extremo de esta relación y al que corresponde la emoción artística.

Ya sea que tomemos un punto de vista moral, estético, o científico, siempre resulta lo mismo. Nada es objetivo excepto aquello que es idéntico para todos. Ahora bien, sólo podemos hablar de tal identidad si es posible una comparación, y si ésta puede ser traducida en una "moneda de cambio" capaz de ser transmitida de una mente a otra. Nada, por tanto, tendrá un valor objetivo excepto aquello que es transmisible a partir del "discurso", esto es, aquello que es inteligible.

Pero esta es sólo una parte de la cuestión. Un agregado absolutamente desordenado no podría tener valor objetivo porque sería ininteligible, pero tampoco podría tenerlo una colección bien ordenada si ésta no correspondiese con sensaciones realmente experimentadas. Me parece algo superfluo recordar esta condición, y no lo habría hecho si últimamente no se hubiese sostenido que la física no es una ciencia experimental. Aunque esta opinión no tiene oportunidad alguna de ser adoptada por los físicos o por los filósofos, es bueno estar advertido de ella para no deslizarse por la pendiente a la que conduciría. Dos condiciones deben ser, por lo tanto, satisfechas, y si la primera separa la realidad[†††††] del sueño, la segunda distingue a aquella del romance.

Ahora bien, ¿qué es la ciencia? He explicado en el capítulo precedente que es, ante todo, una clasificación, una manera de reunir hechos separados por las apariencias, aunque éstos ya estaban unidos por algún tipo de afinidad oculta y natural. La ciencia, en otras palabras, es un sistema de relaciones. Hemos dicho que es en la pura relación

---

[†††††] Aquí utilizo la palabra *real* como sinónimo de *objetivo* y me conformo entonces con el uso común de tal palabra. Quizá esté equivocado, ya que nuestros sueños son reales, aunque no objetivos.

en donde debe buscarse la objetividad: sería en vano buscarla en seres considerados aislados unos de otros.

Decir que la ciencia no puede tener valor objetivo porque nos enseña solamente relaciones es razonar al revés ya que, precisamente, son las relaciones las que únicamente pueden considerarse como objetivas.

Los objetos externos, por ejemplo, para los cuales fue inventada la palabra *objeto*, son realmente *objetos* y no apariencias efímeras y fugitivas, y esto porque no son sólo grupos de sensaciones, sino grupos cimentados por una conexión constante. Es esta conexión, y esta conexión por sí misma, la que es el objeto en sí mismo, y esta conexión es una relación.

Por tanto, cuando preguntamos cuál es el valor objetivo de la ciencia, esto no significa preguntar: ¿la ciencia nos enseña la verdadera naturaleza de las cosas?, sino más bien: ¿nos enseña las verdaderas relaciones de las cosas?

A la primera pregunta nadie dudaría en responder que no, pero creo que incluso podemos ir más allá. No sólo la ciencia es incapaz de enseñarnos la naturaleza de las cosas, sino que nada es capaz de hacerlo, y si algún dios la conociese no encontraría palabras para expresarla. No solamente no podemos adivinar la respuesta, sino que, si nos fuese dada, no entenderíamos nada de ella; yo me pregunto si incluso entendemos realmente la pregunta.

Entonces, cuando una teoría científica pretende enseñarnos qué es el calor, o qué es la electricidad, o la vida, está condenada de antemano: todo lo que puede ofrecernos es una cruda imagen. La ciencia es, por tanto, provisional y se desmorona.

Estando la primera cuestión fuera de toda razón, queda la segunda. ¿Puede la ciencia enseñarnos las verdaderas relaciones de las cosas? ¿Lo que une debe ser considerado por separado, y aquello que pone por separado debe estar unido?

Para entender el significado de esta nueva cuestión es necesario referirnos a lo que se ha dicho antes sobre las condiciones de la objetividad. ¿Tienen estas relaciones un valor objetivo? ¿Serán las mismas para aquellos que vengan después de nosotros?

Es claro que estas relaciones no son las mismas para el científico que para una persona ignorante. Pero esto no es importante, porque si la persona ignorante no ve todas estas relaciones de una vez por todas, el científico puede hacérselas ver a partir de una serie de experimentos y razonamientos. Lo esencial es que haya ciertos puntos sobre los cuales todos aquellos familiarizados con los experimentos puedan estar de acuerdo.

La cuestión es saber si este acuerdo será durable y persistirá para nuestros sucesores. Podría preguntarse si las uniones que la ciencia de hoy hace serán confirmadas por la ciencia de mañana. Para afirmar tal cosa no podemos apelar a un razonamiento *a priori*, porque esta es una cuestión de hecho, y la ciencia ya ha vivido lo suficiente como para que seamos capaces de descubrir, recurriendo a su historia, si los edificios que construye superan la prueba del tiempo, o si únicamente son construcciones efímeras.

¿Qué es lo que vemos? A primera vista parecería que las teorías duran un día y que las ruinas se acumulan unas sobre las otras. Hoy nace una teoría, mañana es la moda, el día después de mañana es una teoría clásica, el cuarto día es anticuada, y el quinto olvidada. Pero si observamos más de cerca, vemos que lo que así ha sucumbido son las teorías propiamente dichas, aquellas que pretenden enseñarnos lo que son las cosas. Pero hay algo en ellas que normalmente sobrevive. Si alguna de ellas nos ha enseñado alguna relación cierta, ésta se adquiere definitivamente, y será encontrada de nuevo bajo otro disfraz en teorías que sucesivamente vendrán a ocupar el lugar de las viejas.

Tomemos sólo un ejemplo sencillo: la teoría de las ondulaciones del éter nos enseñó que la luz era un movimiento; hoy en día, se favorece a la teoría electromagnética que nos enseña que la luz es una corriente. No consideramos el poder reconciliarlas y decir que la luz es una corriente, y que esta corriente es un movimiento. Como en cualquier caso es probable que este movimiento no sea idéntico a aquel que los partidarios de la vieja teoría presumen, podemos pensar justificado decir que esta vieja teoría está destronada. Y aún así queda algo de ella, ya que entre las hipotéticas corrientes que Maxwell supone existen las mismas relaciones que entre los hipotéticos movimientos que Fresnel supuso. Hay algo, por tanto, que se mantiene, y este algo es lo esencial. Esto es lo que explica porque vemos a muchos físicos de hoy en día pasar, sin bochorno alguno, del lenguaje de Fresnel al de Maxwell. Sin duda muchas conexiones que se creían bien establecidas han sido abandonadas, pero al mayor número permanece y parece que debe permanecer.

Y a todo esto, ¿cuál es la medida de su objetividad? Pues bien, es precisamente la misma que la de nuestra creencia en los objetos externos. Estos últimos son reales en esto: las sensaciones que nos hacen experimentar nos parecen como unidas unas con otras por no sé qué tipo de cemento indestructible y no por el azar de un día. En el mismo sentido, la ciencia nos revela otras conexiones entre los fenómenos quizá más

delicadas pero no menos sólidas; estos son hilos tan finos que por mucho tiempo permanecieron sin ser percibidos, pero una vez advertidos no hay forma de no considerarlos. Tales conexiones no son, por consiguiente, menos reales que aquellas que dan su realidad a los objetos externos, y poco importa que hayan sido conocidas recientemente porque ninguna puede perecer antes que la otra.

Podría decirse, por ejemplo, que el éter no es menos real que cualquier objeto externo; decir que este cuerpo [el éter] existe es decir que entre el color de este cuerpo, su sabor, su olor, existe una íntima conexión, sólida y persistente. Decir que el éter existe es decir que hay un parentesco natural entre todos los fenómenos ópticos, y ninguna de las dos proposiciones tiene menos valor que la otra.

Y las síntesis científicas tienen, en un sentido, incluso más realidad que aquellas de los sentidos ordinarios, ya que las primeras abracan más términos y tienden a absorber las síntesis parciales.

Se dirá que la ciencia es sólo una clasificación y que una clasificación no puede ser cierta sino conveniente. Pero es cierto que es conveniente, es cierto que no lo es sólo para mí, sino para todos los hombres; es cierto también que seguirá siendo conveniente para nuestros descendientes, y es cierto, finalmente, que esto no puede deberse al azar.

En suma, la única realidad objetiva consiste en las relaciones de cosas de donde resulta la armonía universal. Sin duda estas relaciones, esta armonía, no podría ser concebida fuera de una mente que la concibe. Pero no obstante son objetivas porque son, serán, o seguirán siendo comunes a todo ser pensante.

Esto nos permite volver a la cuestión relativa a la rotación de la Tierra, y esta consideración hará posible, al mismo tiempo, aclarar lo que precede.

VII. LA ROTACIÓN DE LA TIERRA

"…por lo tanto," he dicho en *Ciencia e Hipótesis*, "esta afirmación, la Tierra gira, no tiene significado…o mejor dicho, estas dos proposiciones, la Tierra gira y es más conveniente que la Tierra gire, tienen uno y el mismo significado".

Estas palabras han dado lugar a las interpretaciones más extrañas. Algunos han creído ver en ellas la resurrección del sistema de Ptolomeo, y quizá la justificación de la condena a Galileo.

No obstante, aquellos que han leído atentamente mi obra no pueden engañarse a sí mismos. Esta verdad, la Tierra gira, fue puesta en pie de igualdad con el postulado de

Euclides, por ejemplo. ¿Fue eso rechazarla? Mejor aún, en el mismo lenguaje bien puede decirse: estas dos proposiciones, el mundo externo existe, o, es más conveniente suponer que existe, tienen uno y el mismo significado. De tal suerte que la hipótesis de la rotación terrestre tendría el mismo grado de certeza que la propia existencia de los objetos externos.

Pero después de lo que hemos explicado en la cuarta parte, podemos ir más lejos. Una teoría física, hemos dicho, es por mucho la más verdadera porque pone en evidencia más relaciones ciertas. A la luz de este nuevo principio examinemos la cuestión que nos ocupa.

No hay tal cosa como un espacio absoluto. Estas dos proposiciones contradictorias: "la Tierra gira" y "la Tierra no gira" no son, por tanto, más cierta una que la otra. Afirmar una y negar la otra, *en el sentido cinemático*, será admitir la existencia de un espacio absoluto.

Pero si una revela relaciones verdaderas que la otra esconde, podemos no obstante considerarla como físicamente más cierta que la otra, ya que posee un contenido más rico. Ahora, a este respecto, no hay duda posible.

Consideremos el aparente movimiento diurno de las estrellas, y el movimiento diurno de los demás cuerpos celestes, y además, el achatamiento de la Tierra, la rotación del péndulo de Foucault, el giro de los ciclones, los vientos alisios, ¿qué más? Para los Ptolomeos todos estos fenómenos no tienen conexión alguna entre ellos; para los copernicanos, en cambio, todos son producidos por la misma causa. Al decir que la Tierra gira, afirmamos que todos estos fenómenos tienen una íntima relación, y *que es cierto que la Tierra gira*, y eso sigue siendo cierto aunque no haya y no pueda haber un espacio absoluto.

Ya hemos dicho lo suficiente de la rotación terrestre; ¿qué debemos decir de su revolución alrededor del Sol? Aquí tenemos, de nuevo, tres fenómenos que para los Ptolomeos son absolutamente independientes y para los copernicanos se refieren al mismo origen: los aparentes desplazamientos de los planetas sobre la esfera celeste, la aberración de las estrellas fijas, y la paralaje de estas mismas estrellas. ¿Se debe a la casualidad que todos los planetas admitan una desigualdad cuyo periodo sea de un año, y que este periodo sea precisamente igual al de la aberración, y precisamente igual además al de la paralaje? Adoptar el sistema de Ptolomeo equivale a responder que sí; adoptar el sistema de Copérnico, a responder que no. Responder esto último es afirmar

que existe una conexión entre los tres fenómenos y que también tal relación es cierta aunque no haya un espacio absoluto.

En el sistema de Ptolomeo los movimientos de los cuerpos celestes no pueden explicarse a partir de la acción de fuerzas centrales, y la mecánica celeste es, por lo tanto, imposible en tal sistema. Las íntimas relaciones entre todos los cuerpos celestes, reveladas por la mecánica celeste, son relaciones verdaderas. Afirmar la inmovilidad de la Tierra equivale a negar estas relaciones, y eso sería engañarnos a nosotros mismos.

La verdad por la que Galileo sufrió sigue siendo, por tanto, la verdad, aunque no tenga, en su conjunto, el mismo significado para el hombre vulgar, y aunque su verdadero significado sea mucho más sutil, más profundo, y más rico.

VIII. LA CIENCIA POR SÍ MISMA

No es contra el señor Le Roy contra quien deseo defender a la ciencia por sí misma, aunque quizá sea esto lo que condena y, al mismo tiempo, cultiva, ya que ama y busca la verdad y no puede vivir sin ella. Sea como fuere, quiero expresar algunos pensamientos.

No podemos conocer todos los hechos, y entonces es necesario elegir aquellos que vale la pena conocer. De acuerdo con Tolstoi, los científicos hacen esta elección al azar, en lugar de hacerla - como sería razonable - con miras a una aplicación práctica. Por el contrario, los científicos piensan que ciertos hechos son más interesantes que otros porque completan una armonía inconclusa, o porque permiten a uno prever un gran número de otros hechos. Si están equivocados, si esta jerarquía de hechos que implícitamente postulan es sólo una vaga ilusión, no podría haber ciencia por sí misma y, consecuentemente, no podría haber ciencia alguna. En cuanto a mí, no creo que estén equivocados y, por ejemplo, he mostrado antes cuál es el alto valor de los hechos astronómicos, y no porque produzcan aplicaciones prácticas, sino porque son los más instructivos de todos.

Es sólo a través de la ciencia y el arte que la civilización es valiosa. Algunos se han preguntado por la validez de la fórmula: la ciencia por sí misma; y aún así es tan buena como la que proclama a la vida por sí misma, aunque ésta se sólo miseria, e incluso a la felicidad por sí misma, si es que no creemos que todos los placeres tienen la misma cualidad, si no deseamos admitir que el objetivo de la civilización es proveer alcohol a todo aquel que adore beber.

Todo acto debe tener un objetivo. Debemos sufrir, debemos trabajar, debemos pagar por nuestro lugar en el juego, y todo esto es por el bien de la visión, o por lo menos para que otros puedan algún día ver.

Todo lo que no es pensamiento es nada, ya que pensamos sólo a través de éste, y todas las palabras que empleamos para hablar expresan sólo pensamientos. Decir que hay algo más que el pensamiento es, por tanto, una afirmación que carece de sentido.

Y aún así - extraña contradicción para aquellos que creen en el tiempo - la historia geológica nos muestra que la vida es únicamente un corto episodio entre dos eternidades de la muerte y que, incluso en este episodio, el pensamiento consciente ha durado y durará sólo un momento. El pensamiento es solamente un destello en medio de una larga noche. Pero este destello lo es todo.